10. שיטות אנטגרציה

עד כה עסקנו בעיקר באנטגרלים מיידים + שיטת הצבה שהביאה אותנו לאנטגרלים כאלה בהמשך נכיר מספר שיטות אנטגרציה שבהם נוכל להיעזר כפתורת אנטגרלים מסובכים.
נכיר תחילה את שיטה **האנטגרציה לפי חלקים.**

10.1 אנטגרציה לפי חלקים:

נחזור לרגע לנגזרות:

$$\frac{d}{dx}\left[U(x)V(x)\right]=\frac{dU(x)}{dx}V(x)+U(x)\frac{dV(x)}{dx}$$

אם נכפיל ב- dx את שני האגפים נקבל:

$$d\left[U\cdot V\right]=dU\cdot V+U\cdot dV$$

$$UdV=d\left(U\cdot V\right)-VdU$$

אם נעשה אנטגרציה על שני האגפים נקבל:

$$\int UdV=\int d(U\cdot V)-\int VdU$$

או:

$$\boxed{\int UdV=U\cdot V-\int VdU} \qquad \textbf{(10.1)}$$

האנטגרל פעולה הפוכה לדפרנציאל.
נוסחה זו נקראת **נוסחת האנטגרציה לפי חלקים.**

נראה דוגמה לשמוש בנוסחה זו.

$$\int xe^x dx=$$

נסמן:

$$dU=dx$$

$$U=x$$

$$dV=e^x dx$$

$$V=\int e^x dx=e^x$$

$$=x\cdot e^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

הערה: שים לב אם נציב $V=e^x+k$ הקבוע יתבטל, ולכן אין צורך בקבוע k.
הכללים הם איפוא:

על מנת להשתמש בנוסחה **(10.1)** לביצוע האנטגרציה יש לפרק את האנטגרל הנתון לשני חלקים אחד יסומן ב- U והשני יחד עם dx ב- dV. (זו הסיבה לשם אנטגרציה בחלקים)

הכללים החשובים הם:

(א) $\int VdU$ לא יהיה מסובך יותר מ- $\int UdV$.

(ב) dV ניתן לאנטגרציה פשוטה.
דוגמאות:

(1

$$\int dxx\cos 2x$$

אף שיטה עד כה לא טפלה באנטגרל כזה . אולם נציב:

$$dV = \cos 2x dx$$
$$x = U$$

אזי:

$$V = \frac{1}{2}\sin 2x$$
$$dx = dU$$

נקבל:

$$\int dxx\cos 2x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

אילו היינו בוחרים :

$$dV = xdx$$
$$U = \cos 2x$$
$$V = \frac{x^2}{2}$$
$$dU = -2\sin 2x dx$$

אזי:

$$\int dxx\cos 2x = \frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x^2\sin 2x dx + c$$

והאנטגרל $\int x^2 \sin 2x dx$ הינו מסובך יותר.

(2

$$\int x^{\mu}\ln x\, dx \qquad ; \qquad [\mu \neq -1]$$

אם נבחר:

$$dV = x^{\mu}dx$$
$$U = \ln x$$
$$V = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$
$$dU = \frac{1}{x}dx$$

$$\int x^{\mu}\ln xdx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\ln x-\int\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\ln x-\frac{1+\mu}{\mu}\int x^{\mu}dx=$$
$$=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\ln x-\frac{1}{(\mu+1)^2}x^{\mu+1}+c=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\left(\ln x-\frac{1}{\mu+1}\right)+c$$

נשים לב כי עבור $\mu=0$ נקבל:

$$\boxed{\int\ln xdx=x\ln x-x+c}$$

(3

$$\int arctgxdx=x\cdot arctgx-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

נציב:

$$\xi=1+x^2$$
$$d\xi=2xdx$$

$$=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d\xi}{\xi}=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$$

ואמנם אם נגזור אגף ימין:

$$arctgx+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1\cdot 2x}{1+x^2}=arctgx$$

(4

$$I=\int e^{-ax}\cos bxdx=$$

אם נבחר:

$$dV=\cos bxdx$$
$$U=e^{-ax}$$

$$V=\frac{1}{b}\sin bx$$
$$dU=-ae^{-ax}dx$$

נקבל:

$$I=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\frac{a}{b}\int\sin bxe^{-ax}dx$$

לכאורה זה נראה שכלל לא התקדמנו שהרי קבלנו במקום $\cos bx$ האנטגרנד $\sin bx$.
אך אם נמשיך נראה מיד מה קורה כאן.

נמשיך לפי חלקים:

$$\int \sin bxe^{-ax}dx = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b}\int \cos bxe^{-ax}dx$$

אם נבחר:

$$dV = \sin bxdx$$
$$U = e^{-ax}$$
$$V = -\frac{1}{b}\cos bx$$
$$dU = -ae^{-ax}$$

ס"ה קיבלנו:

$$I = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \cos bxe^{-ax}dx$$

אבל האנטגרל האחרון שווה ל I.

$$I = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

קיבלנו איפוא משוואה עבור I (האנטגרל הרצוי) ופתרונה יתן את I.

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{e^{-ax}}{b}\left(\sin bx - \frac{a}{b}\cos bx\right)$$

$$I = e^{-ax}\frac{b\left(\sin bx - \frac{a}{b}\cos bx\right)}{a^2+b^2}$$

5)

$$\int x^n e^{-x}dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx + c$$

אם נבחר:

$$U = x^n$$
$$dV = e^{-x}dx$$
$$dU = nx^{n-1}dx$$
$$V = -e^{-x}$$

בצורה זו אם n טבעי ממשיכים הלאה לפי חלקים עד שמורידים את n ל- 0. ונשאר $\int e^{-x}dx$.
נעבור עתה לשיטה נוספת של אנטגרציה המיחדת לאנטגרלים טריגונומטריים.

10.2 אנטגרלים טריגונומטריים.

נדון ב- 4 סוגים של אנטגרלים.

א. אנטגרל מהטיפוס

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

כאשר:
n או m מספר אי זוגי חיובי, נניח **n - איזוגי** נוכל לכתוב:

$$\sin^m x \cos^m x = \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x$$

עכשיו n-1 זוגי ונוכל לכתוב כחזקה של $\left(1-\sin^2 x\right)$ $\cos^2 x =$ ולכן $\sin^m x \cos^{n-1} x$ הופך להיות לסכום נקבל חזקות של סינוס $\sin^m x \cos x\left(1-\sin^2 x\right)^{(n-1)/2}$,

מוכפל ב- $\cos x dx$ שהוא הדפרנציאל של $\sin x$. ולכן ניתן לחשב האנטגרל.

נניח m - איזוגי אותו טפול רק ב- $\sin^m x$.

דוגמאות:
1)

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x csoxdx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx =$$

$$= \int \sin^2 x\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)\cos x dx = \int \sin^2 x \cos x dx - 2\int \sin^4 x \cos x dx + \int \sin^6 x \cos x dx$$

אם נציב:

$$\sin x = U$$
$$\cos x dx = dU$$

$$= \int U^2 dU - 2\int U^4 dU + \int U^6 dU =$$
$$= \frac{U^3}{3} - 2\frac{U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

2)

$$\int \sin^3 x \cos^{1/3} x dx =$$

כאן הסינוס בחזקה אי-זוגית חיובית

$$\int \sin^2 x \cos^{2/3} x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{2/3} x \sin x dx = \int \left(\cos^{2/3} x - \cos^{8/3} x\right)\sin x dx$$

אם נציב:

$$\cos x = U$$
$$-\sin x dx = dU$$

$$= -\int \left(U^{2/3} - U^{8/3} \right) dU = -3\frac{U^{5/3}}{5} + 3\frac{U^{11/3}}{11} + c = -\frac{3}{5}\cos^{5/3} x + \frac{3}{11}\cos^{11/3} x + c$$

ב. סוג ב' של אנטגרלים :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

כאשר m ו- n שניהם זוגיים חיוביים או אפס . באנטגרלים כאלו נעזר בקשרים :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

דוגמאות:

1)

כאן $m = 4, n = 0$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

2)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

אם נציב :

$$\sin 2x = U$$
$$2\cos 2x dx = dU$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int = U^2 dU = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 3x}{3} + c$$

ג. סוג שלישי של אנטגרלים הוא מהטיפוס $\int tg^m x\sec^n xdx$ או $\int \cot^m x\csc^n xdx$

ניתן לפתור אותם בעזרת הזהויות:

$$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

1. בתנאי ש- n מספר חיובי זוגי.
2. או m מספר שלם חיובי ו- $n = 0$.
3. או m ו- n איזוגיים חיובים.

דוגמאות:

(1) $$\int tg^3 xdx = \int tg^2 xtgxdx = \int\left(\sec^2 x - 1\right)tgxdx = \int \sec^2 xtgxdx - \int tgxdx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln(\cos x) + c$$

$$tgx = U$$
$$\sec^2 xdx = dU$$

(2) $$\int \cot^4 xdx = \int \cot^2 x\cot^2 xdx = \int \cot^2 x\left(\csc^2 x - 1\right)dx = \int \cot^2 x\csc^2 xdx - \int \cot^2 xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x - \int\left(\csc^2 x - 1\right)dx = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$$

2 דוגמאות אלו הן מקרה 2, נראה דוגמה למקרה 1.

(3) $$\int tg^3 x\sec^4 xdx = \int tg^3 x\sec^2 x\sec^2 xdx = \int tg^3 x\left(1 + tg^2 x\right)\sec^2 xdx =$$

$$= \int\left(tg^3 x + tg^5 x\right)\sec^2 xdx = \frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^6 x}{6} + c$$

דוגמה למקרה 3. :

(4) $$\int tg^3 x\sec^5 xdx = \int tg^2 x\sec^4 x\sec xtgxdx = \int\left(\sec^2 x - 1\right)\sec^4 x\sec xtgxdx =$$

$$= \int\left(\sec^6 x - \sec^4 x\right)\sec xtgxdx$$

אם נציב:

$$\sec x = U$$

$$= \int \left(U^6 - U^4\right)dU = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + c$$

ד. סוג רביעי של אנטגרלים הוא מהטיפוס מכפלות של פונקציות טריגונומטריות שהארגומנטים אינם שוים

$$\int \sin mx \sin nxdx$$

$$\int \cos mx \sin nxdx$$

$$\int \cos mx \cos nxdx$$

במקרה זה נוכל להשתמש בקשרים ההופכים מכפלה לסכום :

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x-y\right) + \sin(x+y)\right]$$

דוגמאות:

(1) $$\int \sin 3x \sin 2xdx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + c$$

(2) $$\int \cos 4x \cos 2xdx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

<u>10.3 הצבות טריגונומטריות.</u>

הרבה אנטגרלים יכולים להיכתב בצורה פשוטה ע״י הצבות של פונקציות טריגונומטריות במקום משתני אנטגרציה. שיטה זו יעילה במיוחד באנטגרנדים הבאים :

אם האנטגרל מכיל $a^2 - b^2x^2$ נציב $x = \frac{a}{b}\sin\theta$

אם האנטגרל מכיל $a^2 + b^2x^2$ נציב $x = \frac{a}{b}tg\theta$

אם האנטגרל מכיל $b^2x^2 - a^2$ נציב $x = \frac{a}{b}\sec\theta$

דוגמאות:

1) נחשב

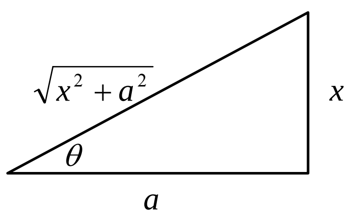
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

למעשה כבר קבלנו אנטגרל זה ע״י גזירה. נראה עתה את שיטה לחשב אנטגרל זה.
במקרה שלנו $b=1$. נציב $\mathrm{dx} = \mathrm{a}\cdot\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $x = a\cdot tg\theta$ ונקבל:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\cdot tg^2\theta + a^2}}dx = \int \frac{1}{a\cdot\sqrt{tg^2\theta+1}}\cancel{a}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln\left(\sec\theta + \mathrm{tg}\theta\right) + c$$

אולם האנטגרל מבוטא באמצעות x לכן אנו מעוניינים לחזור ל- x . וזאת עושים בצורה הבאה:
נבטא את הקשר $x = atg\theta$ באמצעות משולש.



איור 10.1

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} \quad ; \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$$

ולכן

$$\ln\left(\sec\theta + tg\theta\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a$$

הערה: למעשה האנטגרלים שלמדנו בשבוע הקודם ניתנים לפתירה בעזרת הצבה הזו, כגון

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

2)

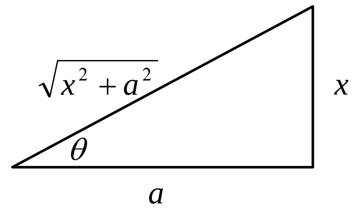
$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{a^3\left(tg^2\theta+1\right)^{3/2}}a\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{\mathrm{a}^2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta d\theta = \frac{\sin\theta}{a^2} + c$$

הצבנו

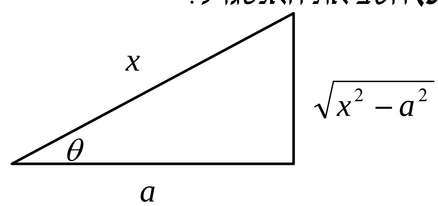
$$x = a\cdot tg\theta$$

$$dx = a\sec^2\theta d\theta$$



$$= \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

3) חשב את האנטגרל:

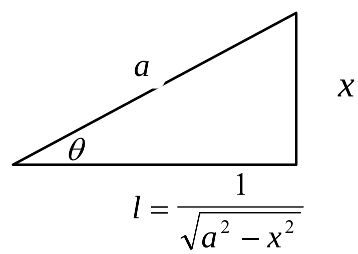


$$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} =$$

נציב

$$x = a\sec\theta$$
$$dx = a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a}{a^4}\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sec\theta\,\tan^3\theta} = \frac{1}{a^3}\int d\theta\ \cot^2\theta = \frac{1}{a^3}\int d\theta\left(\csc^2\theta - 1\right) =$$
$$= -\frac{1}{a^3}\cot\theta - \frac{1}{a^3}\theta + c = -\frac{1}{a^3}\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x} + c$$



שים לב לפשטות האנטגרל בהצבה הנ״ל!

4) חשב את האנטגרל

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\frac{a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

עשינו הצבה:

$$x = a\sin\theta$$
$$dx = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

שים לב לפשטות האנטגרל בהצבה זו.

5) חשב :

$$\int dx\frac{x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int dx\frac{2x-1+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int dx\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx=$$

$$\left(x^2-x+1\right)=U$$

$$(2x-1)dx=dU$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dU}{U^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\right]^2}dx=-\frac{1}{2}U^{-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\right]^2}dx$$

אם נציב :

$$x-\frac{1}{2}=y$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2-x\right)+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left[y^2+\frac{3}{4}\right]^2}dy$$

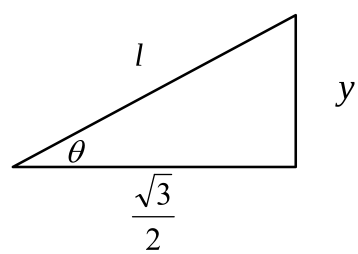
באנטגרל כזה מציבים :

$$y=atg\theta$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}tg\theta$$

$$dy=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta$$

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



$$l=\sqrt{y^2+3/4}$$

$$\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta\quad;\quad\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{2^4}\sec^4\theta=\frac{9}{16}\sec^4\theta$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\frac{9}{16}\sec^4\theta}=-\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}arctg\frac{2y}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

סה"כ נקבל :

$$= -\frac{1}{2\left(x^2 - x + 1\right)} + \frac{2\sqrt{3}}{9} arctg \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x^2 - x + 1} + c$$

10.4 שיטת השברים החלקיים

בשיטה זו נלמד לבצע אנטגרציה של פונקציות אלגבריות רציונליות.
נזכיר, כי פונקציה רציונלית היא פונקציה היכולה להכתב כמנה של שני פולינומים כלומר:

הפונקציה
$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

היא רציונלית כאשר המקדמים a_n ו- b_n הם מספרים ממשים ו- n ו- m הם מספרים טבעיים.
אם דרגת הפולינום במונה גבוהה או שווה לדרגת המכנה ניתן תמיד לחלק את המונה במכנה ולקבל פולינום פלוס פונקציה רציונלית שבה דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה.
כלומר, אם $m \geq n > 1$, אזי:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P(x) + \frac{R_l(x)}{P_m(x)}$$

ומקרה כזה נזדקק לבצע חלוקה זו כדי לחשב האנטגרל.
דוגמאות:

1)
$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

ולכן:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) + c$$

2)

$$\int \frac{x^3 + 1}{x - 1} dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x - 1}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x - 1) + c$$

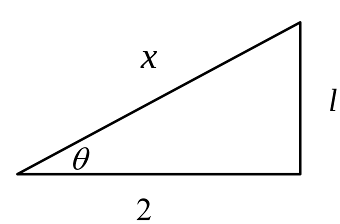
ולכן הבעיה תהיה תמיד לטפל בפונקציה רציונלית שבה פולינום במונה בדרגה נמוכה מהמכנה. שיטה הטיפול תהיה **שיטת השברים החלקיים.**
נמחיש את השיטה בדוגמאות הבאות:

(1) נתון האנטגרל $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

עד כה פתרנו אנטגרל כזה בשתי שיטות:

א. למדנו נוסחה: $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a}$

ב. בעזרת הצבה הטריגונומטרית



נציב:
$$x = 2\sec\theta$$
$$dx = 2\sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$$

$$l = \sqrt{x^2 - 4}$$

כלומר:

$$\int dx\frac{1}{x^2-4}=\int\frac{2\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{d}\theta}{4tg^2\theta}=\frac{1}{2}\int\frac{\sec\theta}{tg\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\csc\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\ln(\sec\theta-\cot\theta)+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+c$$

נראה עתה שיטה שלישית הנקראת אנטגרציה בחלקים:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

נכתוב
נניח שניתן לכתוב:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+2}$$

כאשר A ו- B קבועים.

ונבדוק האם ניתן הדבר , אם נצליח לחשב את A ו- B סימן שהדבר ניתן .
נכפיל את שני האגפים ב- $(x-2)(x+2)$ ונקבל:

$$1=A(x-2)+B(x-2)=x(A+B)+2(B-A)$$

בשני האגפים מופיעים פולינומים וישנה הגדרה שני פולינומים שנים אם ורק אם כל מקדמיהם שוים.
ולכן:

$$2(B-A)=1\ ;\ \ B-A=\frac{1}{2}$$

$$\underline{A+B=0}$$

$$2A=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{4}$$

$$B=-A=\frac{1}{4}$$

בדיקה:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

ועתה:

$$\int dx\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{4}\ln(x+2)=\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+c$$

זה נקרא **שיטה השברים החלקיים** בגלל הפתרון לשברים חלקיים.

הערה: שים לב קל למצוא את B-A בדרך הבאה :(המשוואה נכונה לכל x).

$$1 = A(x+2) + B(x-2) =$$

נציב : $x = 2$ ונקבל $A = \frac{1}{4}$

נציב : $x = -2$ ונקבל $B = -\frac{1}{4}$

נסתכל עתה על דוגמה הבאה :

3)

$$\int dx \frac{1}{x^4 - 16} = \int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2+4)} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

נניח :

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

נכפיל שני האגפים במכנה המשותף $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ ונקבל :

$$1 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)$$
$$1 = x^3(A+B+C) + x^2(2A-2B+D) + x(4A+4B-4C) + 8A - 8B - 4D$$

שני פולינומים שוים אם מקדמיהם שוים כלומר :

(1) A + B + C = 0
(2) 2A + 2B + D = 0
(3) 4A + 4B - 4C = 0
(4) 8A + 8B - 4D = 1

נזדקק לפתור 4 משוואות ב- 4 נעלמים.

$$4 \times (1) - (3) \to 8C = 0 \to C = 0$$
$$A + B = 0$$
$$A = -B$$
$$(4) \to 8A + 8A - 4D = 1$$
$$(2) \to 2A + 2A + d = 0$$
$$4 \times (2) \to 16A + 4D = 0$$
$$8D = -1 \Rightarrow D = -\frac{1}{8}$$
$$4A = -D = \frac{1}{8} \Rightarrow A = \frac{1}{32} \Rightarrow B = -\frac{1}{32}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}dx = \frac{1}{32}\int\frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{32}\int\frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{8}\int\frac{1}{x^2+4}dx =$$
$$= \frac{1}{32}\ln(x-2) - \frac{1}{32}\ln(x+2) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c = \underline{\underline{\frac{1}{32}\ln\frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{16}arctg\frac{x}{2} + c}}$$

נשים לב שאם נוכל לפרק לביטויים ליניאריים הרי הסכום יהיה:

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots.} = \frac{A}{(a_1x+b_1)} + \frac{B}{(a_2x+b_2)} + \ldots$$

אם מופיע $\frac{1}{(a_2x^2+b_n)}$ שאי אפשר לפרקו הרי במונה יופיע חזקה ליניארית.

במדה שיש לנו שורש כפול חייבים לפרק הדרך הבאה:

למשל:

$$\int\frac{1}{x(x-1)^2}dx \qquad\qquad x^3-2x+x$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$
$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$1 = x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A$ $A=1$ $B=-A=-1$ $-2A-B+C=0$ $C=1$	$C=1 \quad \leftarrow \quad x=1$ $A=1 \quad \leftarrow \quad x=0\ ;\ \ \mathrm{x}=2$ $1 = \mathrm{A}+2\mathrm{B}+2\mathrm{C}$ $1 = 1+2\mathrm{B}+2$ $\mathrm{B} = -1$

לסיכום נוכל לומר:

1. לכל גורם ליניארי $ax+b$ המופיע במכנה מתאים חלקי מהצורה $\frac{A}{ax+b}$ כאשר A קבוע שצריך לחשבו.
2. לכל גורם ליניארי $ax+b$ המופיע n פעמים במכנה של פונקציה רציונלית מתאים סכום של n שברים חלקיים מהצורה.

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

כאשר ה- A קבועים שיש לחשבם .

3. לכל גורם רבועי אי פריק ax^2+bx+c המופיע פעם אחת במכנה של פונקציה רציונלית מתאים שבר חלקי מהצורה $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ כאשר A ו- B קבועים שיש לחשבם.

4. לכל גורם רבועי אי פריק ax^2+bx+c המופיע n פעמים במכנה של פונקציה רציונלית מתאים סכום של n מנות חלקיות מהצורה.

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

דוגמה למקרה כללי:

$$\frac{1}{\left(x^2-4\right)^2\left(x^2+4\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+4)}+\frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

דוגמאות:

1)

$$\int\frac{4+x^2}{8+x}dx$$

דרגת המונה גדולה מהמכנה ולכן נחלק המונה במכנה:

$$\frac{x^2+4}{x+8}=x-8+\frac{68}{x+8}$$

$$\int\frac{x^2+4}{x+8}dx\int\left(x-8+\frac{68}{x+8}\right)dx=\frac{x^2}{2}-8x+68\ln(x+8)+1$$

2)

$$\int\frac{x^2+20}{x^2-16}dx=$$

דרגת המונה שוה למכנה ולכן נחלק:

$$=\int 1dx+\int\frac{36}{x^2-16}dx=x+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x-4}dx-\frac{9}{2}\int\frac{1}{x+4}dx$$

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{1}{(x-4)(x+4)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+4}$$

$$1=A(x+4)+B(x-4)$$

$$1=x(A+B)+4(A-B)$$

$$4(A-B)=1$$

$$A+B=0$$

$$4\cdot 2A=1$$

$$A=\frac{1}{8}$$

$$B=-\frac{1}{8}$$

$$=x+\frac{9}{2}\ln\frac{x-4}{x+4}+c$$

3)

$$\int\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+d}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

מוציאים את המקדמים A , B , C , D , E , F ואז מקבלים את התוצאה.

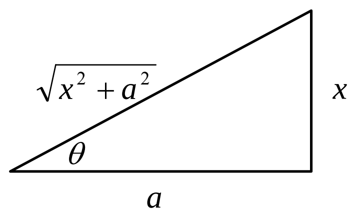
$$A\ln(x-1)+B\ln(x+1)+\frac{1}{2}C\ln(x^2+1)+Darctgx+\frac{1}{2}\frac{E}{x^2+1}+F\int dx\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

נציב $x=tg\theta$ לפי שיטת הצבה טריגונומטרית ונקבל:

$$\sqrt{x^2+1}=\sec\theta$$

$$\left(x^2+1\right)^2=\sec^4\theta$$

$$dx=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$\int dx\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sec^4\theta}=\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}+c=\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c=\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+c$$

ולכן ס"ה נקבל:

$$\int\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx=A\ln(x-1)+B\ln(x+1)+\frac{C}{2}\ln(x^2+1)+$$

$$+D\cdot arctgx+\frac{1}{2}\frac{E}{x^2+1}+\frac{F}{2}\cdot arctgx+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+c$$

$$x+2=A(x+1)(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+(Cx+D)(x^2-1)(x^2+1)+(Ex+F)(x^2-1)$$

4)

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}dx =$$

נפרק תחילה לגורמים את המכנה , למשואה ממעלה אי זוגית יש תמיד שורש ממשי . נחפש שורשים למשואה ע"י נחוש ננסה $x=1$ ואמנם $x=1$ פתרון.

$$1^3-7\cdot 1+6=0$$

ולכן $x-1$ גורם ב- x^3-7x+6 נמצא את הגורם השני.

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

$$* \quad 2x+1=A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2)$$
$$2x+1=x^2(A+B+C)+x(A+2B-3C)+(-6A-3B+2C)$$
$$A+B+C=0$$
$$A+2B-3C=2$$
$$-6A-3B+2C=1$$

הפתרון :

$$A=-\frac{3}{4}$$
$$B=1$$
$$C=-\frac{1}{4}$$

דרך קלה : נציב במשוואה $x=1$

$$3=A(1-2)(1+) \quad ; \quad -\frac{3}{4}=A$$
$$x=2 \quad ; \quad 5=B(2-1)(2+3)$$
$$B=1 \quad ; \quad x=-3$$
$$2(-3)+1=c(-3-1)(-3-2)$$
$$-5=20C \quad ; \quad -\frac{1}{4}=C$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}dx=-\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+3}dx=$$
$$=-\frac{3}{4}\ln(x-1)+\ln(x-2)-\frac{1}{4}\ln(x+3)+c$$

10.5 הצבות שונות (אלגבריות).

1. אנטגרל הכולל חזקות שבורות של : $a+bx$ $(a+bx)^{\frac{n}{m}}$, הצבה של חזקה מתאימה של z ,
$z^m = a+bx$ תהפוך אותו לאנטגרל של פונקציה רציונלית.

דוגמאות:
(1

$$\int \frac{x^2 dx}{(2+3x)^{2/3}} =$$

אם נציב:

$$z^3 = 2+3x$$
$$3z^2 dz = 3dx$$
$$z^2 dz = dx$$
$$z^2 = (2+3x)^{2/3}$$
$$x = \frac{z^3-2}{3}$$
$$x^2 = \frac{1}{9}(z^3-2)^2$$
$$\int \frac{x^2 dx}{(2+3x)^{2/3}} = \frac{1}{9}\int \frac{(z^2-2)^2}{z^2} z^2 dz = \frac{1}{9}\int \left(z^2-2\right)^2 dz = \frac{1}{9}\int \left(z^6 - 2z^3 + 4\right)dz =$$
$$= \frac{z^7}{7\cdot 9} - \frac{2z^4}{36} + \frac{4z}{9} + c = \frac{(2+3x)^{7/3}}{63} - \frac{1}{18}(2+3x)^{4/3} + \frac{4}{9}(2+3x)^{1/3} + c$$

(2

$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{4+5x}} =$$

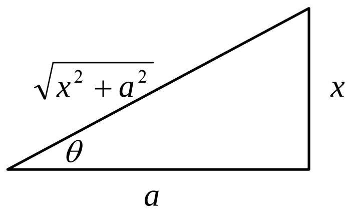
נציב:

$$z^2 = 4+5x$$
$$2zdz = 5dx$$
$$dx = \frac{2}{5} zdz$$
$$\int \frac{dx}{4+\sqrt{4+5x}} = \frac{2}{5}\int \frac{zdz}{4+z} = \frac{2}{5}\int \frac{z+4-4}{z+4}dz = \frac{2}{5}\int \left(1 - \frac{4}{z+4}\right)dz =$$
$$= \frac{2}{5}z - \frac{8}{5}\ln(z+4) + c = \frac{2}{5}(4+5x)^{1/2} - \frac{8}{5}\ln\left(\sqrt{4+5x}+4\right) + c$$

2. אנטגרל המכיל חזקות שבורות של $a+bx^n$: הצבה מתאימה של חזקה של z עבור $a+bx^n$
תביא לאנטגרל של פונקציה רציולית.
לדוגמה:

$$\int \frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{x}dx$$

ניתן לפתור ע"י:



$$x = a\sec\theta$$
$$dx = a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$(\mathrm{x}^2 - a^2)^{3/2} = a^3 tg^3\theta$$

$$\int \frac{a^3 tg^3\theta\cdot a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{d}\theta}{a\sec\theta} = a^3\int tg^4\theta\,\mathrm{d}\theta = a^3\int \mathrm{tg}^2\theta tg^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \mathrm{a}^3\int tg^2\theta\left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta = a^3\int tg^2\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \text{ - } \mathrm{a}^2\int tg^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \mathrm{a}^3\int tg^2\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta - a^3\int\left(\sec^2\theta - 1\right)d\theta =$$
$$= \frac{a^3}{3}tg^3\theta - a^3 tg\theta + a^3\theta + c = \frac{a^3}{3}\frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{a^3} -$$
$$- a^3\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + a^3 arctg\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + c$$

נראה עתה לפי שיטה הצבה אלגברית:

נציב:

$$x^2 - a^2 = z^2$$

על מנת להיפטר מהשורש.

$$2xdx = 2zdz$$

מכאן

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{x^2} = \frac{zdz}{z^2+a^2}$$

$$\int\frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{x}dx = \int\frac{\left(z^2\right)^{3/2}zdz}{z^2+a^2} = \int\frac{z^4dz}{z^2+a^2} =$$

אבל

$$\frac{z^4}{z^2+a^2} = z^2 - a^2 + \frac{a^4}{z^2+a^2}$$

$$= \int\left(z^2 - a^2 + \frac{a^4}{z^2+a^2}\right)dz = \frac{z^3}{3} - a^2 z + a^4 arctg\frac{z}{a} + c =$$
$$= \frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{3} - a^2\left(x^2-a^2\right)^{1/2} + \frac{a^4}{a}arctg\frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{a} + c$$

אולם היתרון בשיטה זו שאינה מוגבלת רק לביטויים מחזקה שניה נוכל לראות בדוגמה הבאה:

$$\int x^5\sqrt{2+x^3}\,dx =$$

$$z^2 = 2 + x^3$$

$$2xdx = 3x^2 dx$$

$$x^5 dx = x^3 \cdot x^2 dx = \left(z^2 - 2\right)\frac{2}{3} \cdot zdz$$

$$= \frac{2}{3}\int z \cdot \left(z^2 - 2\right)zdz = \frac{2}{3}\int \left(z^4 - 2z^2\right)dz = \frac{2}{3}\frac{z^5}{5} - \frac{4}{3}\frac{z^3}{3} + c = \frac{2}{15}\left(2 + x^3\right)^{5/2} - \frac{4}{9}\left(2 + x^2\right)^{3/2} + c$$

נסיים בזאת הפרק הדן בשיטות אינטגרציה למעשה יש עוד מספר שיטות אינטגרציה במיוחד הצבות חשובות. אך לא ניתן להציג את כל השיטות וההצבות שמספרן רב ביותר! נתנו רק את הבסיס העיקרי לחישוב אינטגרלים. ואת הגישה לפתירת אינטגרלים. רצוי לעיין בספרות שהבאנו במבוא על מנת לראות דרכים נוספות.

להלן נסכם את שיטות האינטגרציה ונציג דוגמאות נוספות.

לפני כן נציין מספר דוגמאות לאנטגרלים שאינם ניתנים לתיאור באמצעות פונקציות אלמנטריות.

לדוגמה:

$$\int e^{-x^2} dx \;\; ; \;\; \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{lnx}} \;\; ; \;\; \int \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}} dx \;\; ; \;\; \int \frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{x}} dx$$

אנטגרלים כאלו אין להם פתרון, כלומר לא קיימות פונקציות שאלו הנגזרת שלהם. מחשבים אנטגרלים כאלה בדרך כלל בשיטות נומריות כפי שנראה בהמשך.

__10.6 סיכום.__

א. **אנטגרלים מיידים**:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^n}{n+1} + n & \mathrm{n \neq -1} \\ \\ \mathrm{lnx + n} & \mathrm{n = -1} \end{cases}$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + c$$

$$\int \cos xdx = \sin x + c$$

$$\int tgxdx = \ln(\sec x) + c$$

$$\int \cot xdx = \ln(\csc x) + c$$

$$\int \sec xdx = \ln(tgx + \sec x) + c$$

$$\int \csc xdx = \ln(\csc x - \cot x) + c$$

$$\int \sec^2 xdx = tgx + c$$

$$\int \csc^2 xdx = -\cot x + c$$

$$\int \sec h^2 xdx = tghx + c$$

$$\int \csc h^2 xdx = -\coth x + c$$

$$\int tghxdx = \ln(\cosh x) + c$$

$$\int \coth xdx = \ln(\sinh x) + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x - a}{x + a} + c$$

$$\int \sinh xdx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh xdx = \sinh x + c$$

<u>ב. שיטת הצבה.</u>

אם נתון אנטגרל מהצורה

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx$$

$$\int sun\varphi(x)\varphi'(x)dx$$

או:

$$\int \varphi^n(x)\varphi'(x)dx$$

אז אפשר להשתמש בשיטת הצבה פשוטה:

$$\varphi(x) = U$$
$$\varphi^{'}(x)dx = dU$$

נקבל:

$$\int f(U)dU$$

לדוגמה:

$$\int x^7 \sin\left(x^8\right)dx$$

ושיטה זו בד״כ מביאה לאנטגרלים מידיים.

נסכם עתה את שיטות האנטגרציה שלמדנו.

<u>ג. אנטגרציה לפי חלקים.</u>

$$\int UdV = U\cdot V - \int VdU$$

מבוצעת בתנאים הבאים:

א. החלק הנבחר כ- dV חייב להיות נתון לבצוע אנטגרציה פשוטה.
ב. $\int VdU$ לא יהיה מסובך יותר מ- $\int UdV$

<u>ד. אנטגרלים טריגונומטריים.</u>

א. לפחות n או m אי זוגי.

$$\int \sin^m x\cos^n xdx \Rightarrow \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\cos xdx$$

ב. n ו- m זוגיים.

מציבים:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ג.

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

הופכים המכפלית לסכומים.

<u>ה. הצבות טריגונומטריות.</u>

1. כאשר באנטגרנד בטוי $a^2 - b^2x^2$ מציבים $x = \frac{a}{b}\sin\theta$.
2. כאשר באנטגרנד בטוי $a^2 + b^2x^2$ מציבים $x = \frac{a}{b}tg\theta$.
3. כאשר באנטגרנד בטוי $b^2x^2 - a^2$ מציבים $x = \frac{a}{b}\sec\theta$.

<u>ו. שיטת השברים החלקיים.</u>

.1

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2}$$

.2

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)^n(a_2x+b_2)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{B_1}{a_2x+b_2} + \frac{B_2}{(a_2x+b_2)^2} + \ldots + \frac{B_1}{(a_2x+b_2)^n}$$

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)(a_1x+b_1)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2 + A_3x}{ax^2+bx+c}$$

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n(a_1x+b_1)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{B_1 + C_1x}{ax^2+bx+c} + \frac{B_1 + C_1x}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_n + C_nx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

דוגמאות:

1)

$$\int x^5 arctgx dx =$$

כדאי להשתמש בחלקים:

$$U = arctgx$$

$$dU = \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$dV = x^5 dx$$

$$V = \frac{x^6}{6}$$

עכשיו נשתמש בנוסחה שלנו:

$$\int UdV = U \cdot V - \int VdU$$

$$= \frac{x^6}{6} arctgx - \int \frac{1}{6}\frac{x^6}{x^2+1}dx$$

עתה נשתמש בחלוק: דרגת המונה גבוהה מהמכנה.

$$\int \frac{x^6}{x^2+1}dx = \int \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - arctgx + c$$

ס"ה נקבל:

$$\int x^5 arctgx dx = \frac{x^6}{6} arctgx - \frac{1}{6}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - arctgx \right) + c$$

2)

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}dx = \int \frac{dU}{U^2} = \int U^{-2}dU = -U^{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\ln x = U$$

$$\frac{1}{x}dx = dU$$

3)

$$\int \frac{dx}{x^3+1}dx = \qquad \left\| \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2-x+1)} \right\|$$

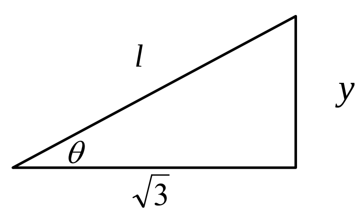
$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$
$$1 = x^2(A + B) + x(-A + B + C) + A + C$$
$$A + B = 0$$
$$-A + B + C = 0$$
$$A + C = 1$$
$$\Rightarrow -A = B \;\; ; \quad -2A + C = 0 \;\; ; \;\; \mathrm{A} + \mathrm{C} = 1$$
$$\mathrm{A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{B} = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3 \cdot 2}\int \frac{2x - 1 + 1 - 4dx}{x^2 - x + 1} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} =$$
$$\left\| \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c \right\|$$
$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c$$

(4

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 - 2x + 4\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left[(x-1)^2 + 3\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dy}{\left[y^2 + 3\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \sqrt{3}tg\theta$$
$$dy = \sqrt{3}\sec^2\theta\, \mathrm{d}\theta$$
$$\sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{3}\sec\theta$$
$$\left(y^2 + 3\right)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}\sec^3\theta$$



$$l = \sqrt{y^2 + 3}$$

$$\int \frac{dy}{\left[y^2 + 3\right]^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\, \mathrm{d}\theta}{3\sqrt{3}\sec^3\theta} = \frac{1}{3}\int \cos\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{\sin\theta}{3} + c = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + c = \frac{x - 1}{\left(x^2 - 2x + 4\right)^{\frac{1}{2}}} + c$$

(5

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}dx =$$

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

$$x^2+2 = A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3$$

$$x^2+2 = x^3(A+D) + x^2(-2A+2A+b+3D) + x(-3A-B+C+3D) - 2A - 2B - 2C + D$$

$$A+D=0 \ \ ; \ \ \mathrm{B+3D=1} \ \ ;$$

$$\mathrm{-3A - B + C + 3D = 0}$$

$$\mathrm{-2A - 2B - 2C + D = 0} \Rightarrow \mathrm{D} = \frac{2}{9} \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{A = -D = -}\frac{2}{9} \Rightarrow B = 1 - 3D = 1 - \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\ln(x+1) - \frac{1}{3}(x+1)^{-1} + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{2}{9}\ln(x-2) + c$$