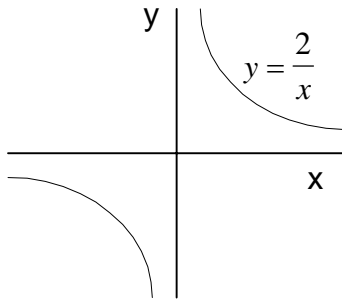


5. רציפות

5.1 התנאים לרציפות



איור 5.1

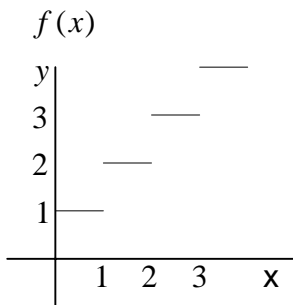
אנו נטפל במסגרת קורס זה בעיקר בפונקציות רציפות לכל x פרט למספר סופי של ערכי x . לכן חשוב להבין את המשמעות של פונקציה רציפה.

ננסה לענות על השאלה מתי פונקציה תהיה רציפה בתחום $a \leq x \leq b$. התשובה הטבעית עשויה להיות: כאשר הגרף של הפונקציה ניתן לאיור ללא הרמת העפרון מהנייר. זה יכול להיעשות למשל עבור הפונקציה $y = 2/x$ בין $x = 1$ ל- $x = 3$, אך זה אינו אפשרי בתחום $-1 \leq x \leq 1$

כיוון שבנקודה $x=0$ צריכים להרים את העפרון מהנייר (ראה איור 5.1), ואז נאמר שהפונקציה איננה רציפה בנקודה $x=0$.

דוגמה נוספת: נתונה הפונקציה -

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \\ 3, & 2 < x \leq 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



איור 5.2

זוהי פונקציה מדרגות (ראה איור 5.2). היא אינה רציפה בנקודות $x=1, 2, 3, \dots$ והן נקראות נקודות אי רציפות.

מה הן הבעיות עם נקודות אלו? במקרה של הפונקציה $y = \frac{2}{x}$ נדגיש שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=0$. במקרה של פונקציה המדרגות, אם נצייר את הגרף נבחין שאנו יכולים לצייר את הגרף משמאל בתחום בין 0 ל-1 כולל הנקודה $x=1$ אולם אז צריכים לקפוץ

אם רוצים להמשיך לערכי x גדולים מ-1. אם מציירים מימין נגיע כאשר x מתקרב ל-1 לנקודה $y=2$ במקום $y=1$ המתקבלת כאשר מציירים הפונקציה משמאל. הקושי נובע, כמובן, מכך שלפונקציה אין גבול עבור $x \rightarrow 1$.

5.2 הגדרה:

נגדיר אי-רציפות של פונקציה $y = f(x)$ בצורה מדויקת: ל- $y = f(x)$ אי-רציפות בנקודה $x=a$ אם קיים אחד התנאים הבאים:

א. הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=a$.

ב. הפונקציה מוגדרת בנקודה $x=a$ אך אין לה גבול עבור $x \rightarrow a$.

ג. הפונקציה מוגדרת בנקודה $x=a$ ויש לה גבול עבור $x \rightarrow a$ אך ערך הגבול אינו שווה לערך הפונקציה בנקודה זו.

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \quad \text{לדוגמה:}$$

לפונקציה זו יש אי-רציפות בנקודה $x=2$ היות והיא לא מוגדרת בנקודה $x=2$. מצד שני, מתקיים -

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 2 \quad \text{- כלומר שיש לה גבול ב-} x \rightarrow 2.$$

נוכל להגדיר את ערך הפונקציה בנקודה $x=2$ לפי רצוננו שהיא איננה מוגדרת בנקודה $x=2$. נניח שנגדיר בנקודה $x=2$ $y=10$ ($f(2) = 10$). האם במקרה זה תהיה הפונקציה רציפה? מבדיקת שלושת

התנאים עולה כי תנאים א' ו-ב' אינם קיימים, אך תנאי ג' קיים שהרי $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 10 \quad \text{כלומר הפונקציה איננה רציפה.}$$

אולם, אם נגדיר כי $f(2) = 2$ אזי הפונקציה תהיה רציפה.

לסיכום אפשר להגדיר **רציפות** בנקודה: פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה $x=a$ אם ורק אם היא מוגדרת בנקודה, וגבול הפונקציה כאשר $x \rightarrow a$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=a$.

כתיבה קצרה:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{אם ורק אם רציפה ב-} x=a$$

נגדיר רציפות באינטרוול:

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בתחום $a \leq x \leq b$ אם היא רציפה בכל נקודות התחום.