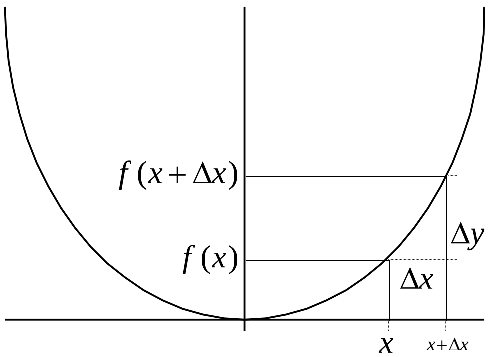
6. נגזרות

6.1 קצב גדול



איור 6.1

נתבונן בפונקציה $y = f(x) = x^2$ (ראה איור 6.1). מהגרף אנו רואים שהפונקציה גדלה לאט מאוד כאשר x גדל במקצת מ-0. כאשר x גדול יותר, הפונקציה מתחילה לעלות מהר יותר. נדון אפוא עתה **בקצב הגידול** של הפונקציה y. מה תהיה ההגדרה המתאימה לגודל כזה? לאחר מחשבה קצרה נוכל לומר שאם נשנה את x במעט למשל מ-x ל- $x+\Delta x$ (Δx הוא השינוי בערך x), נראה מה יהיה השינוי המתאים ב-y כלומר ב- $f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. נגדיר את **קצב הגידול** באופן הבא כיחס בין השינוי ב-y לשינוי ב-x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

לדוגמה, במקרה שלנו -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

אנו רואים שככל ש-x קרוב יותר לאפס קצב הגידול קטן יותר וככל שהוא מתרחק מאפס קצב הגידול הולך וגדל. קצב הגדול תלוי ב- x וגם ב- Δx.

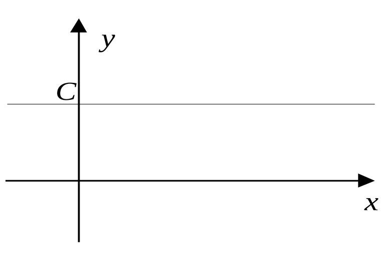
6.2 נגזרות

הנגזרת מוגדרת כגבול של קצב גידול הפונקציה כאשר השינוי במשתנה הבלתי- תלוי Δx שואף לאפס. כלומר:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} = y'} \quad \textbf{(6.1)}$$

$f'(x)$ נקראת הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. בצד ימין של המשואה (6.1) כתובים סימונים נוספים לנגזרת. במקרה של הדוגמה הקודמת, $y = x^2$, מתקיים $\lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. כלומר הנגזרת של הפונקציה $y = x^2$ היא $y' = 2x$ ונוכל לראות שעבור $x=0$ קיים $y' = 0$. כלומר קצב הגידול יהיה אפס, ויגדל עם עליית x.

נראה עתה דוגמאות לגזירת פונקציות נוספות. למשל נגזור את הפונקציה $y = C$ (קבוע) או $f(x) = C$ כאשר C - קבוע,



איור 6.2

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

נשים לב כי Δx לעולם שונה מאפס ולכן קיים הגבול הנ״ל. כלומר קצב הגידול הוא אפס , ואמנם פונקציה קבועה קצב הגידול שלה אפס.

תרגיל: לחשב נגזרות של $y=x$, $y=x^2$ ו- $y=x^3$. על פי ההגדרה (6.1).

נחשב עתה את הנגזרת של ה פונקציה $f(x)=x^n$ כאשר n מספר טבעי. לצורך זה נציג קודם את **הבינום של ניוטון**:

ידועה הנוסחה $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

וכן $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

באופן כללי לכל n טבעי אפשר להוכיח **באינדוקציה** כי:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots+nab^{n-1}+b^n$$

פיתוח זה נקרא בשם הבינום של ניוטון. ואמנם עבור n=1, n=2, n=3 מקבלים את הנוסחאות הנ״ל.

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^n$ לפי ההגדרה, משואה **(6.1)**.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}$$

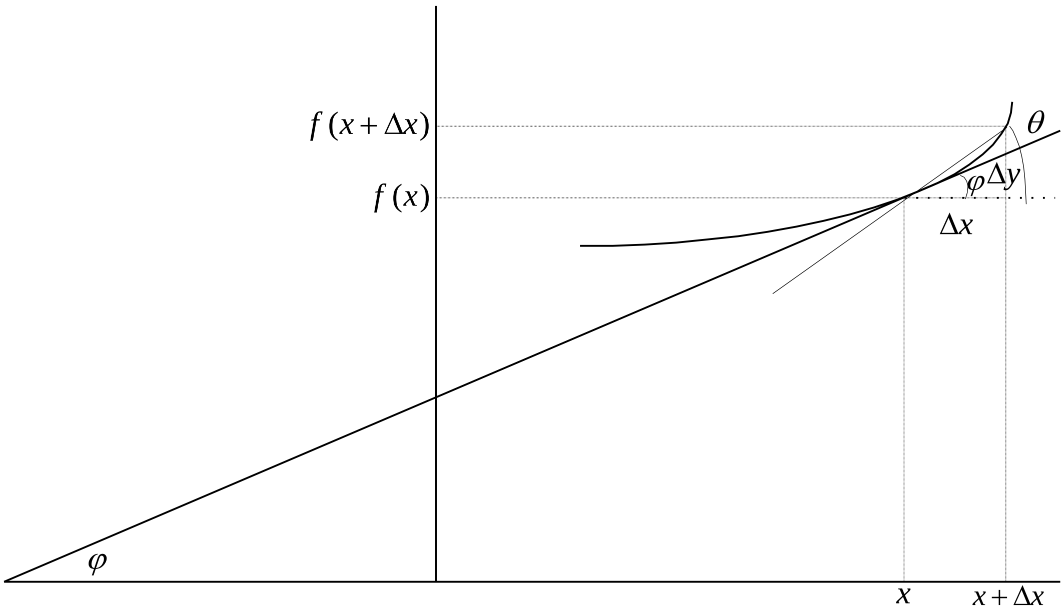
כלומר אם: $y=x^2$

אזי: $y'=nx^{n-1}$

והנוסחה נכונה לכל n **טבעי** או אפס.

6.3 המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת

נתונה הפונקציה $y = f(x)$ (ראה איור 6.3) נסתכל על המשיק בנקודה כלשהי x (משיק נוגע בפונקציה רק בנקודה אחת). הוא יוצר זוית φ עם הכיוון החיובי של ציר x. הגודל $\tan\varphi$ נקרא שיפוע המשיק. (שיפוע ישר הוא טנגנס הזוית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר x).

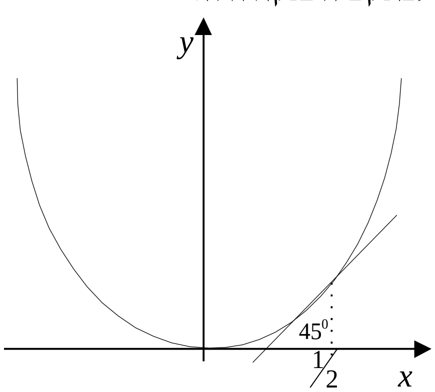


איור 6.3

אם נתבונן עתה על הגודל
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan\vartheta$$

הוא שוה ל- $\tan\vartheta$, כאשר $\tan\vartheta$ הוא שיפוע המיתר החותך את הפונקציה בנקודות x ו-$x+\Delta x$. כאשר $\Delta x \to 0$ הזוית ϑ תשאף לזוית φ ולכן
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan\varphi.$$

כלומר $f'(x)$ הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x שווה לשיפוע המשיק לפונקציה בנקודה זו.



לדוגמה: $f(x) = x^2$ הנגזרת $f'(x) = 2x$.
ואמנם, בנקודה $x=0$, $f'(x) = 0$ השיפוע שיוצר המשיק בנקודה זו הוא אפס שכן המשיק היא ציר x בעצמו.
אם x הולך וגדל, השיפוע (טנגנס הזוית) ילך ויגדל. בנקודה $x = \frac{1}{2}$ $f'(x) = 1$ כלומר $\tan\vartheta = 1$ והזוית שיוצר המשיק עם ציר x תהיה 45^o. (ראה איור 6.4)

איור 6.4: המשיק לפונקציה $y = x^2$ ב- $x = \frac{1}{2}$.

6.4 חוקי גזירה

א. C- קבוע $$\frac{d}{dx}\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot f'(x)$$

ב. $$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

I. $$\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

א. $$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

כפי שנראה להלן, אפשר להוכיח חוקים אלו בעזרת הגדרת הנגזרת, נוסחה (6.1).

חוקים אלו יעזרו לנו מאד בחשוב נגזרות. למשל עבור $y = 7x^3$, $y' = 7\left(x^3\right)' = 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$

או למשל אם $y = 2x^2 - 5x^5 + 10$: אזי $y' = 2 \cdot 2x - 5 \cdot 5x^4 + 0 = 4x - 25x^4$.

נוכיח עתה חוקים אלו:

א.

$$\frac{d}{dx}\left[C \cdot f(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} C \cdot \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x} =$$

ובתורת הגבולות למדנו שקבוע אפשר להוציא לפני הגבול:

$$= C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x)$$

ב.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - \left(f(x) + g(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות. ללא קושי ניתן לראות שנגזרת ההפרש שווה להפרש הנגזרות:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) - g(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

ג. $$\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ד.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)-\left(f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\right)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\cdot\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$\frac{1}{g^2(x)}\left[g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

דוגמאות:

$$y=x^4\left(x^3+x+1\right)$$

$$y'=4x^3\left(x^3+x+1\right)+x^4\left(3x^2+1\right)=7x^6+5x^4+4x^3$$

נוסחה לנגזרת של מכפלת שלש פונקציות.

$$y=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)=(u\cdot v)\cdot w$$

$$\frac{dy}{dx}=(u\cdot v)\frac{dw}{dx}+\frac{d(u\cdot v)}{dx}\cdot w=(u\cdot v)\frac{dw}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}\right)\cdot w=$$

$$\frac{du}{dx}\cdot v\cdot w+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}$$

ואותו דבר גם לגבי מכפלה של מספר רב של פונקציות. לדוגמה:

$$y=x^4\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)+x^4(2x)\left(x^3-1\right)+x^4\left(x^2+1\right)\left(3x^2\right)=9x^8+7x^6-6x^5-4x^3$$

דוגמה לנגזרת של מנה:

$$y=\frac{x^3+1}{x^2+9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2\left(x^2+9\right)-\left(x^3+1\right)(2x)}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{x^4+27x^2-2x}{\left(x^2+9\right)^2}$$

נשתמש במנה לחישוב:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{0\cdot f(x)-1\cdot f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

ומכאן:

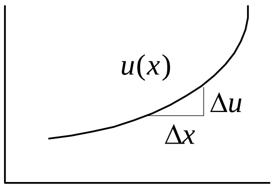
$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$y'=\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

כלומר שהחוק $\left(x^m\right)'=mx^{m-1}$ שהוכחנו אותו למספרים טבעיים, וגם לאפס, וגם למספרים שלמים שליליים. לדוגמה: אם $y=x^{-3}$ או $y'=-3x^{-4}$.

6.5 נגזרת של פונקציה מורכבת

נניח שנתונה לנו הפונקציה $y=\left(2x^2+5\right)^{10}$. על מנת לגזור ביטוי זה לפי החוקים שלמדנו עד עתה, יהיה עלינו להעלות בחזקה עשירית את הביטוי, שזה $2^{10}=1024$ איברים, ולגזור אחד אחד. נראה עתה דרך פשוטה יותר לחשוב נגזרות כאלו:



איור 6.5

נסמן $u=2x^2+5$

ולכן $y=f(u)=u^{10}$

ניתן להראות את y פונקציה של u ו- u פונקציה של x לכן קוראים ל- y פונקציה מורכבת.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

ישנו משפט שאומר שאם u פונקציה רציפה של x אז אם $\Delta x\to 0$ אז גם $\Delta u\to 0$ (ראה הסבר באיור 6.5) ולכן אפשר לכתוב:

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

נחשב את הנגזרת של הדוגמה הקודמת: $\frac{dy}{du}=10u^9 \qquad \frac{du}{dx}=4x$

ולכן: $\frac{dy}{dx}=10u^9\cdot 4x=10\left(2x^2+5\right)^9\cdot 4x=40x\left(2x^2+5\right)^9$

כלומר - פתרנו את הבעיה בקלות.

באופן כללי:

$$y=u^n(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}(x)\cdot\frac{du}{dx}$$

לכל n שלם.

6.6 גזירה של פונקציה לא מפורשת

לעתים ניתן הקשר בין x ל-y בצורה לא מפורשת (פונקציה מפורשת מופיע y באגף אחד לבד, ואיברים עם x או חופשיים באגף השני).

למשל: $y=5x^2+7$ היא פונקציה מפורשת אבל

הפונקציה $y^3x^2+y^2x-xy+7=0$ אינה מפורשת.

במקרה זה מחשבים את הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ ע"י גזירת שני האגפים לפי x:

$$3y^2\frac{dy}{dx}\cdot x^2+y^3\cdot 2x+2y\frac{dy}{dx}\cdot x+y^2-y-x\frac{dy}{dx}=0$$

ממשואה זה ניתן לחלץ את $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}\left[3y^2x^2+2yx-x\right]=y-y^2-2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-y^2-2xy^2}{3y^2x^2+2yx-x}$$

נמצא את הנגזרת של $y=x^{n/m}$ כאשר n ו- m שלמים

נוכל לכתוב בצורה אחרת - $y^m=x^n$. צורה זו נקראת **צורה הבלתי מפורשת** של אותה הפונקציה.

נגזור את שני האגפים לפי x:

$$my^{m-1}\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\frac{x^{n-1}}{y^{m-1}}=\frac{n}{m}\frac{x^{n-1}}{x^{\frac{n}{m}(m-1)}}=\frac{n}{m}x^{\left[n-1-\frac{n}{m}(m-1)\right]}=\frac{n}{m}x^{\left[n-1-n+\frac{n}{m}\right]}=\frac{n}{m}x^{\left[\frac{n}{m}-1\right]}$$

כלומר אם: $y=x^{n/m}=\sqrt[m]{x^n}$

אזי $y'=\dfrac{n}{m}x^{\left[\frac{n}{m}-1\right]}$

אם כן, החוק $y=x^a\ ;\ y'=ax^{a-1}$ **נכון לכל a שהוא מספר רציונלי**.

למשל: $y=x^{\frac{3}{2}}\ \to\ y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

דוגמה מורכבת יותר:

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt[3]{x^2+4}-x\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)}{\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$$

נסמן: $u=x^2+4$ אזי $g=\sqrt[3]{u}=u^{1/3}$

$$\frac{dg}{dx}=\frac{dg}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2x}{3}\left(x^2+4\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-\frac{2x^2}{3}\left(x^2+4\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}}}$$

עד כה למדנו שיטות לגזור כל פונקציה אלגברית.

6.7 נגזרות מסדרים גבוהים יותר

בדיוק כפי ששאלנו בתחילה מהו קצב הגדול של $f(x)$, אנו יכולים עתה לשאול מהו קצב הגידול של $f'(x)$ שכן $f'(x)$ היא פונקציה חדשה ונוכל לחקור מהו קצב הגידול שלה.

זאת נוכל לעשות ע״י גזירת הנגזרת. כלומר: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. גודל זה נקרא **נגזרת שניה**, ומסומן בצורה הבאה: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\equiv\frac{d^2y}{dx^2}\equiv y''$. באותו אופן, אפשר גם לגזור את הנגזרת השניה. נסמן זאת: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\equiv\frac{d^3y}{dx^3}$. וזוהי **הנגזרת השלישית** של y. באופן כללי, $\frac{d^ny}{dx^n}$ היא הנגזרת הח-ית של הפונקציה. סימון אחר: $y'\quad y''\quad y'''\quad y^{(IV)}$, ולעתים $y^{(4)}$ או אף $y^{(n)}$.

לדוגמה:

$$y=3x^4-6x^3+x^2+7 \qquad y'''=72x-36$$
$$y'=12x^3-18x^2+2x \qquad y^{(\mathrm{IV})}=72$$
$$y''=36x^2-36x+2 \qquad y^{(\mathrm{V})}=0$$

כלומר ש- $0=\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}$ עבור $n\geq 5$ (עבור פונקציה זו).

דוגמה נוספת:

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$
$$y'=-1\cdot x^{-2}$$
$$y''=2x^{-3}$$
$$y'''=-2\cdot 3x^{-4}$$
$$y^{(\mathrm{IV})}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$$

ובמקרה זה, ניתן לומר כי באופן כללי אפשר לכתוב: $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-(n+1)}$. לא תמיד אפשר למצוא נוסחה כללית עבור הנגזרת ה-n-ית.

בהמשך נדון בגזירה של פונקציות טרנסצנדנטיות. עד כה טיפלנו בפונקציות אלגבריות. בפונקציות אלגבריות יכולות להופיע רק הפעולות **חיבור**, **חיסור**, **כפל**, **חילוק**, **הוצאת שורש והעלאה בחזקה**, ובתנאי שהחזקה/בסיס השורש אינם תלויים ב-x. לדוגמה:

$$y=\sqrt[4]{x^2+7}-15 \qquad y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}+\sqrt[3]{x^2}$$

כל הפונקציות האחרות, כלומר אלו שמכילות פעולות שונות מהנ״ל כגון הפונקציות הטריגונומטריות, הפונקציות הלוגריתמיות והפונקציות המעריכיות הן פונקציות טרנסצנדנטיות. לדוגמה:

$$y=\sin x \qquad y=\sqrt{\tan(2x+3)} \qquad y=\sqrt{\log_2(x+7)} \qquad y=\frac{x}{\log_{10}x}$$
$$y=2^{\frac{1}{x}} \qquad y=6^{\sqrt{x}} \qquad y=x^x$$

6.8 נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

נתונה הפונקציה $y=\sin x$, נחשב את הנגזרת לפי הגדרה:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=$$

נשתמש עתה בנוסחה מטריגונומטריה - $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ כאשר אצלנו $\alpha=x+\Delta x$ ו- $\beta=x$ ולכן נקבל:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\tfrac{\Delta x}{2}\right)\right]\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right]=$$
$$\cos x\cdot 1=\cos x \;\Rightarrow\; y'=\cos x$$

הערה: נשים לב כי תוצאה זו נכונה רק עבור x ברדיאנים!

לחישוב הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ראה עמ׳ 28.

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה $y=\cos x$:

$$y=\cos x=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)$$
$$y'=\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)=\frac{d}{du}(\sin u)\frac{du}{dx}=\cos u\cdot(-1)=-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$$
$$y=\cos x \;\Rightarrow\; y'=-\sin x$$

שים לב: הצבנו $u=\frac{\pi}{2}-x$

נחשב עתה את הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות האחרות : $(\tan x)'$, $(\cot x)'$.

$$(\tan x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{-(\tan x)'}{(\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} =$$
$$= -\csc^2 x \qquad \left[\csc x = \frac{1}{\sin x}\right]$$

נחשב $\frac{d}{d\vartheta}\sec\vartheta$:

$$\frac{d}{d\vartheta}\sec\vartheta = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}\right) = -\frac{(\cos\vartheta)'}{\cos^2\vartheta} = -\frac{(-\sin\vartheta)}{\cos^2\vartheta} = \sec\vartheta\tan\vartheta$$

נחשב $\frac{d}{d\vartheta}\csc\vartheta$:

$$\frac{d}{d\vartheta}\csc\vartheta = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right) = -\frac{(\sin\vartheta)'}{\sin^2\vartheta} = -\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = -\cot\vartheta\csc\vartheta$$

תרגיל: השתמש בהגדרת הנגזרת והוכח : $\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right) = 2\sin x\cos x$

דוגמאות:

1. מצא את הנגזרת של $y = \sin\left(\frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4}\right)$:

$$y = \sin u \qquad u = \tfrac{3}{5}x + \tfrac{\pi}{4}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{5}\cos\left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

2. חשב הנגזרות של $y = tg^3 2\theta$:

$$y = \tan^3 2\theta \quad u = \tan 2\theta \quad v = 2\theta \quad \Rightarrow \quad y = u^3 \quad u = \tan v$$
$$y' = \frac{d}{d\theta}\tan^3 2\theta = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{d\theta} = 3u^2\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2 = 6\tan^2 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2 2\theta} = 6\tan^2 2\theta\sec^2 2\theta$$

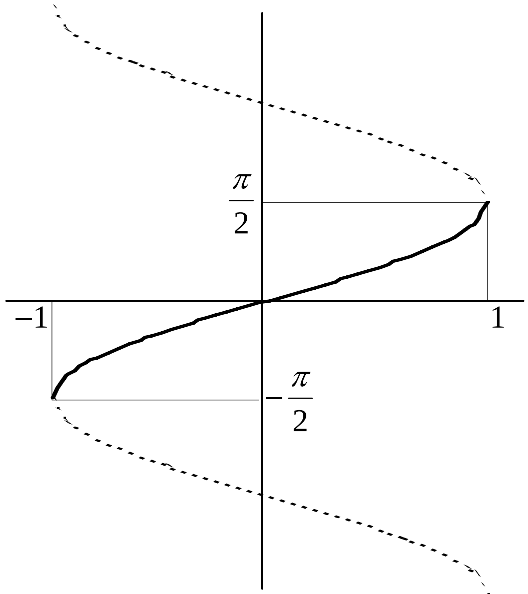
3. מצא את $\frac{dy}{dx}$:

$$y = x^3\tan^2\frac{x}{4}$$
$$\frac{dy}{dx} = x^3\frac{d}{dx}\left(\tan^2\frac{x}{4}\right) + \left(x^3\right)'\cdot\tan^2\frac{x}{4} = 2x^3\tan\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4} + 3x^2\tan^2\frac{x}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan\frac{x}{4}\left(x\sec^2\frac{x}{4} + 6\tan\frac{x}{4}\right)$$

6.9 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

א. הפונקציה $y=\arcsin x$

הגדרנו את הפונקציה $y=\sin^{-1}x$ או $y=\arcsin x$ כפונקציה ש-y היא הזווית ברדיאנים שהסינוס שלה הוא x. כלומר - המקיימת את הקשר $x=\sin y \Leftrightarrow y=\arcsin x$. x מקבל אפוא ערכים בין 1- ל-1+. היות ויש אינסוף ערכי y המתאימים לכל x (למשל ל-$x=0$ - $y=0\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$), החלטנו לבחור תחום בו הפונקציה היא חד-ערכית. קראנו לתחום **ענף ראשי** או **ערך ראשי**. במקרה שלנו מדובר בתחום $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.



איור 6.6

על מנת לגזור את הפונקציה $y=\arcsin x$ נוכל לגזור פונקציה השקולה לה: $x=\sin y$, להלן:

$$1=\cos y\frac{dy}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

כידוע קיים הקשר $\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. היות ו-$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ הרי הוא חייב להיות חיובי (ברביע הראשון וברביע הרביעי ה-cos חיובי). ולכן:

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

מסקנה: אם $y=\arcsin x$, הרי ש-$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ב. הפונקציה $y=\arccos$

נגזור עתה את $y=\arccos x$ שהיא שקולה ל-$x=\cos y$, כלומר מהי הזווית שהקוסינוס שלה הוא x. פונקציה זו הערך הראשי שלה הוא: $0\le y\le\pi$. נחשב y' ע״י כך שנגזור את שני האגפים ב-$x=\cos y$:

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\cos y)\ \Rightarrow\ 1=-\sin y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}$$

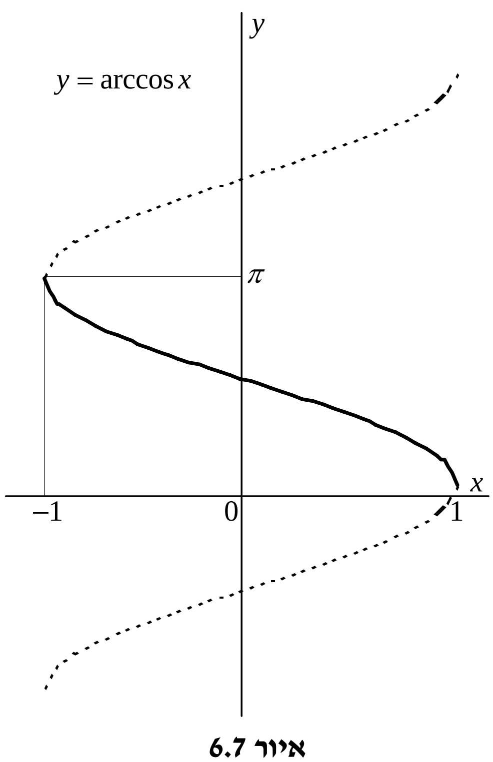
ובתחום הנדון, $\sin y\ge 0$ ולכן:

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

או:

$$\frac{d}{dx}\arccos x=\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

הערה: א. אילו היינו בוחרים בענף ראשי אחר למשל בין $-\pi\le y\le 0$ אזי $\sin y$ היה שלילי והיינו מציבים $\sin y=-\sqrt{1-x^2}$ והנגזרת הייתה חיובית כמו ב- $\arcsin x$.



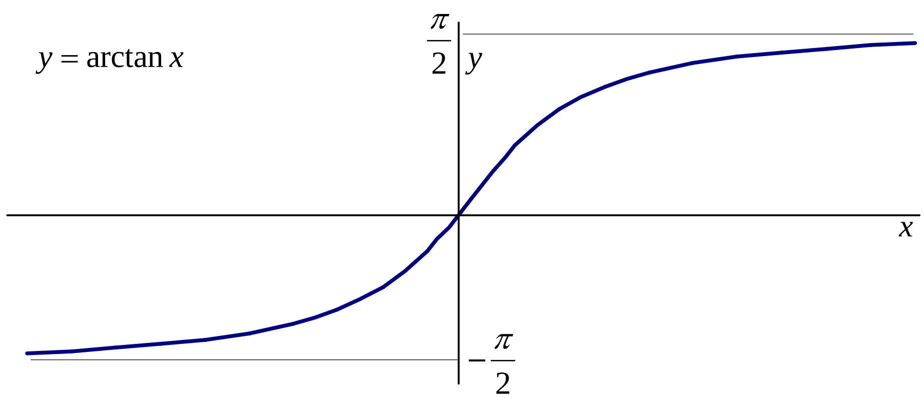
איור 6.7

ג. הפונקציה $y = \arctan x$

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה - $y = \tan^{-1} x = \arctan x$:

פונקציה זו משמעותה היא ש-y היא הזווית שהטנגנס שלה הוא x כלומר $x = tgy$ (ראה איור הענף הראשי הוא: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. אם כן נחשב עתה את $\frac{dy}{dx}$ ע״י גזירת שני אגפי המשוואה $x = \tan y$ לפי x: וע״י שימוש בקשר $\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha}$ טריגונומטריה:

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$



איור 6.8

ד. הפונקציה $y = arc\cot x$

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה - $y = \cot^{-1} x = \operatorname{arc}\cot x$:

פונקציה זו משמעותה היא ש-y היא הזווית ש**הקוטנגנס** שלה הוא x כלומר $x = \cot y$.

נחשב את $\frac{dy}{dx}$ ע״י גזירת שני אגפי המשוואה $x = \cot y$ לפי x.

ועי״ טריגונומטריה:

$$1 = \csc^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

כלומר:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot x = -\frac{1}{1+x^2}$$

דוגמאות:

.1

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2x^2}{x^3\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

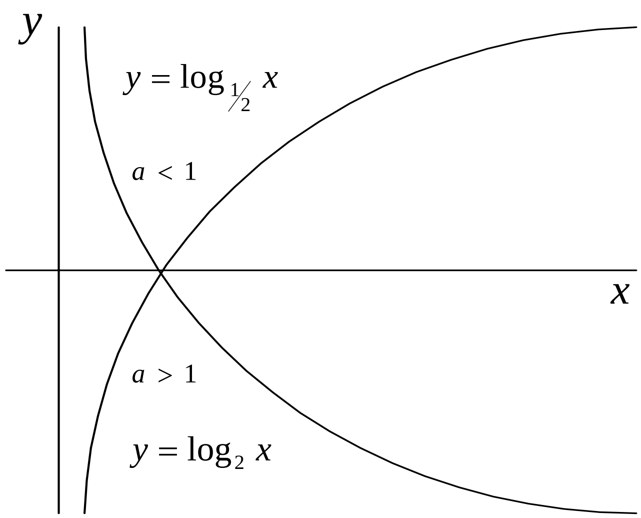
.2

$$\frac{d}{dx}\arctan\left(\sqrt{1+x}\right) = \frac{1}{1+(1+x)} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}$$

6.10 הפונקציה הלוגריתמית והפונקציה המעריכית

הפונקציה הלוגריתמית $y=\log_a x$ שקולה לפונקציה $x=a^y$ כלומר היא הפונקציה ההפוכה לפונקצית החזקה $y=a^x$. a נקרא **הבסיס** $0<a\neq 1$.

באיור 6.9 רואים את התיאור הגרפי של הפונקציה הלוגריתמית (שים לב לשני המצבים האפשריים):



איור 6.9

מעבר בין בסיסי לוגרתמים

ניתן לבצע מעבר מבסיס אחד לבסיס אחר לפי הנוסחה: $\log_B A=\dfrac{\log_C A}{\log_C B}$

הוכחה: $\log_B A=x \quad\Leftrightarrow\quad B^x=A$

ניקח לוג של שני האגפים לפי בסיס C ונקבל: $\log_C B^x=\log_C A$

ולפי חוקי הלוגריתמים: $x\log_C B=\log_c A$

מכאן: $x=\dfrac{\log_C A}{\log_C B}$

דוגמה:

$$\log_8 16=\frac{\log_2 16}{\log_2 8}=\frac{4}{3}$$

על מנת לחשב את הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית נחשב תחילה את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$:

בעזרת פיתוח הבינום של ניוטון עבור n שלמים.:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$$

מכאן:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

אם ניקח

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.$$

וטור זה, אם מחברים את איבריו מקבלים תוצאה סופית (כמו בטור גיאומטרי אינסופי):

1+1+0.5+0.16666..+0.04166..+0.008333..+0.0013888...

ככל שמחשבים יותר איברים מקבלים תוצאה יותר מדויקת. את הגבול עצמו (שהוא תוצאת חיבור כל אינסוף האיברים) נסמן באות האנגלית **e**:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e} = 2.718281828459\ldots$$

בשנת 1884 חישבו 346 מקומות אחרי הנקודה העשרונית את **e**. היום מחשבים בעזרת מחשבים מליוני מקומות אחרי הנקודה. נחשב עתה את הנגזרת של $y=\log_a x$:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{x\cdot\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \ldots$$

וכעת נגדיר $u\equiv\frac{x}{\Delta x}$

אם $\Delta x\to 0$ אז ברור ש- $u\equiv\frac{x}{\Delta x}\to\infty$.

$$\ldots = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\log_a\mathbf{e}$$

שים לב: הנחנו כאן כי גבול של לוגריתם שווה ללוגריתם של הגבול.

כלומר שהנגזרת של פונקצית הלוגריתם היא: $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a\mathbf{e}$

אם נבחר את בסיס הלוגריתם כ-**e** נקבל: $(\log_{\mathbf{e}} x)' = \frac{1}{x}\log_{\mathbf{e}}\mathbf{e} = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$

תוצאה זו מסבירה את היעילות בבחירת **e** כבסיס הלוגריתמים שכן הגורם $\log_a\mathbf{e}$ מצטמצם ל-1.

דוגמאות:

1. $y=\log_4(3x+7)$

ניקח $u=3x+7$ כמתווך: $y' = \frac{1}{3x+7}(\log_4\mathbf{e})\cdot 3 = \frac{3\log_4\mathbf{e}}{3x+7}$

2. $y=\ln\left[33x^3\left(x^2+3\right)^2(4x-3)^4\right]$ חשב y'!

כדאי לכתוב: $y=\ln 33+3\ln x+2\ln\left(x^2+3\right)+4\ln(4x-3)$

$$y' = 0+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x+\frac{4\cdot 4}{4x-3} = \frac{3}{x}+\frac{4x}{x^2+3}+\frac{16}{4x-3} =$$

$$= \frac{3\left(x^2+3\right)(4x-3)+4x^2(4x-3)+16x\left(x^2+3\right)}{x\left(x^2+3\right)(4x-3)} = \frac{44x^3-21x^2+84x-27}{x\left(x^2+3\right)(4x-3)}$$

3. חשב $\frac{dy}{dx}$ עבור $y=\ln^2\left(3x+4\right)$.

נציב $z=\ln\left(3x+4\right)$ ו- $u=3x+4$:

$$y=z^2 \quad z=\ln u$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2z\cdot\frac{3}{u}=\frac{6}{3x+4}\cdot\ln\left(3x+4\right)$$

4. לעתים קל יותר לחשב נגזרת על ידי שימוש בלוגריתמים. לדוגמה, חשב :

$$y=\frac{x\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}$$

תרגיל זה מסובך לחישוב ע״י השיטה הרגילה. יש כאן גם מנה וגם מכפלה ולכן כדאי לחשב תחילה $\ln$ של שני האגפים :

$$\ln y=\ln x+2\ln\left(1-x^2\right)-\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

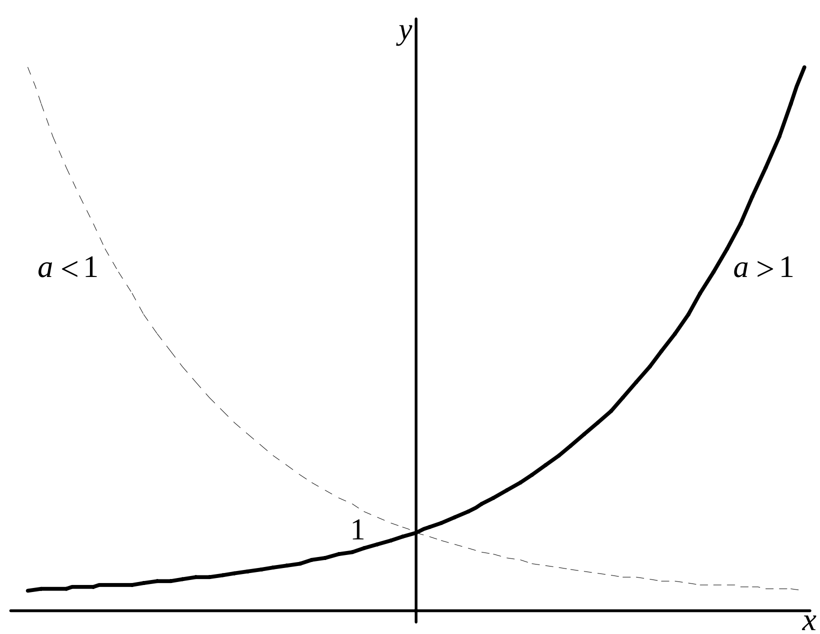
גוזרים את שני האגפים לפי x :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{2\cdot(-2x)}{1-x^2}-\frac{2x}{2\left(1+x^2\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x\right)^{1/2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{4x}{1-x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{\left(1-5x^2-4x^4\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$$

6.11 הפונקציה המעריכית

נמצא את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה ללוגריתמית - הפונקציה המעריכית : $y=a^x$. אנו נטפל אך ורק במצב בו $\underline{a>0}$, $a\neq 1$. תיאורה הגרפי של הפונקציה :



איור 6.10

על מנת לגזור ניקח לוגריתם של שני האגפים: $\log_a y = x$

נגזור לפי x:

$$\frac{\log_a \mathbf{e}}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log_a \mathbf{e}} = a^x \log_{\mathbf{e}} a = a^x \ln a$$

כלומר $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. אם נגזור את הפונקציה $\mathbf{e}^x$ נקבל: $\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x \ln \mathbf{e} = \mathbf{e}^x \cdot 1 = \mathbf{e}^x$.

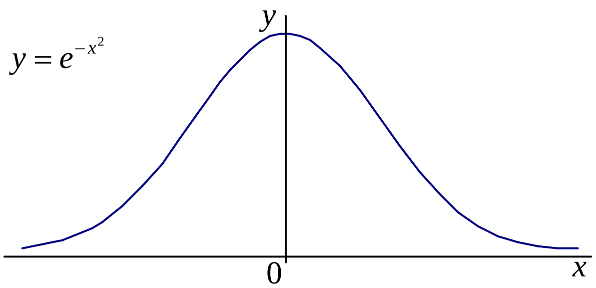
מסקנה מעניינת - הנגזרת של הפונקציה $\mathbf{e}^x$ היא $\mathbf{e}^x$ וחוזר חלילה. כלומר השיפוע או מידת הגידול של הפונקציה ושל כל הנגזרות שלה יהיו שוות ל- $\mathbf{e}^x$.

דוגמאות:

1. גזור - $y = \mathbf{e}^{-x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\mathbf{e}^{-x^2}$$

צורת הפונקציה היא צורה של פעמון. ב- $x = 0$ השיפוע הוא אפס, ב- $x > 0$ השיפוע שלילי, וב- $x < 0$ השיפוע חיובי.



איור 6.11

2. $y = 10^{\sin x}$:

$$\frac{dy}{dx} = 10^{\sin x} \ln 10 \cdot \cos x$$

3. $x = \mathbf{e}^{-\alpha t} \sin \omega t$ ‏(α ו-ω קבועים):

חשב $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{e}^{-\alpha t} \cdot (-\alpha) \sin \omega t + \mathbf{e}^{-\alpha t} \cos \omega t \cdot \omega =$$
$$= \mathbf{e}^{-\alpha t}(\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t)$$

4. גזור את: $y = \ln\left(\mathbf{e}^x + 1\right)$

$$y' = \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x + 1}$$

עתה אנו יכולים לחשב את נוסחת הנגזרת של $y = x^n$ כאשר n הוא כל מספר ממשי (רציונלי או אי-רציונלי):

$$y = x^n \;\Rightarrow\; \ln y = n \ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{y}{x} = n \cdot \frac{x^n}{x} = nx^{n-1} \qquad .$$

כאן לא השתמשנו בשום הנחה לגבי n ולכן הנוסחה $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ נכונה לכל n ממשי.

6.12 נגזרות של פונקציות טרנסצנדנטיות המכילות את x גם בבסיס וגם במעריך :

באופן כללי : $y = u(x)^{v(x)}$

על מנת למצוא את הנגזרת נוח ביותר לקחת ln של שני האגפים ולגזור לפי x :

$$\ln y = v(x)\ln u(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)$$

לדוגמה :

1. $y = x^x$

$$\ln y = x\ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

2. $y = x^{\ln x}$:

$$\ln y = \ln x \ln x = (\ln x)^2 \equiv \ln^2 x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\ln x - 1}\cdot\ln x$$

3. $y = x^{x^2}$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$$

6.13 נגזרות של פונקציות היפרבוליות

לעתים קרובות מופיעות קומבינציות של פונקציות אקספוננציאליות אשר חוזרות על עצמן, ולכן ראוי לתת להם שמות של פונקציות. למשל: $\mathbf{e}^x$ מופיע לעתים קרובות בקומבינציה $\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}\right)$. פונקציה זו נקראת **סינוס היפרבולי של** x ומסמנים אותה ב- $\sinh x$.

כלומר: $\sinh x \equiv \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ וכמו כן מגדירים $\cosh x \equiv \dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$.

בנוסף: $\tanh x \equiv \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}$ $\qquad$ $\coth x \equiv \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}$

$\operatorname{sech} x \equiv \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}$ $\qquad$ $\operatorname{csch} x \equiv \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}$

נבדוק עתה את ההתנהגות של פונקציות אלה. נשים לב כי $\sinh 0 = 0$ וכן כי $\sinh(-x) = -\sinh x$. פונקציה כזו נקראת אי-זוגית.

כמו כן אם $x \to \infty$ $\qquad$ $\sinh x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\mathbf{e}^x$

וכן אם $x \to -\infty$ $\qquad$ $\sinh x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{|x|}$

כלומר שהפונקציה נראית כמו באיור 6.12.

נגזור:

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}\right)\right] =$$

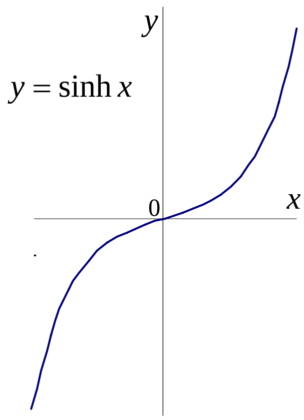
$$= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}\right) = \cosh x$$

נשים לב גם לקשר החשוב $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{e}^{2x} + 2 + \mathbf{e}^{-2x}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{e}^{2x} - 2 + \mathbf{e}^{-2x}\right) = 1$$

נתאר את הפונקציה $y = \cosh x$ (ראה איור 6.13).



איור 6.12

$$\cosh 0 = 1$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

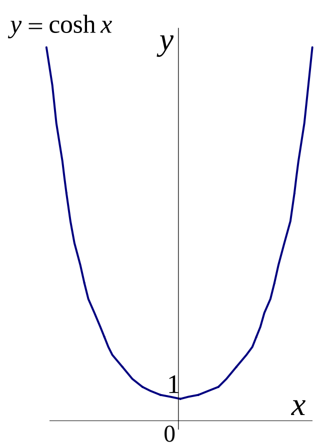
$$\cosh x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x}$$

$$\cosh x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}e^{|x|}$$

יש לשים לב בביצוע הנגזרת כי:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}\right) = \sinh x$$

לא כמו הסימן ההפוך כאשר גוזרים את פונקציית הקוסינוס הרגילה.



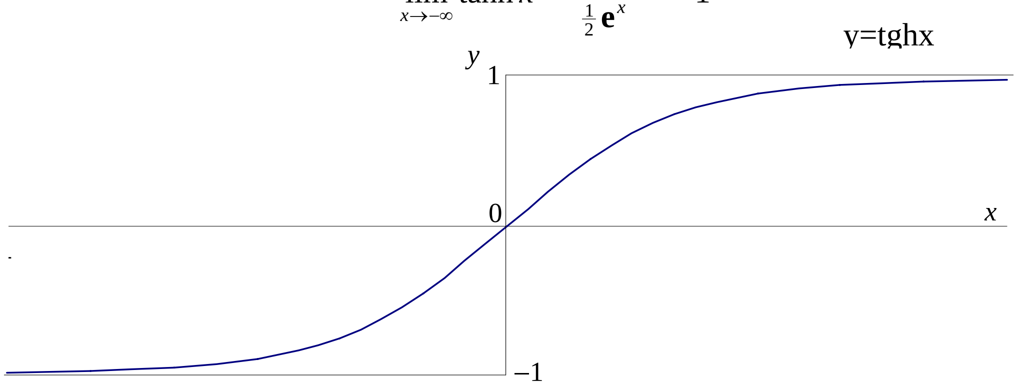
איור 6.13

הפונקציה $y = \tanh x$

$$\tanh 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = \frac{\tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x}}{\tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x = \frac{-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x}}{\tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x}} = -1$$



איור 6.14

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sech}^2\, x$$

נגדיר:

$$\mathrm{sech}\, x = \frac{2}{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}}$$

כמו כן, קל להוכיח כי : $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$
באופן דומה להוכחות שהבאנו ניתן להוכיח כי :

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

6.14 הצגה פרמטרית של פונקציה

נוכיח תחילה נוסחה חשובה : נתונה הפונקציה $u = u(v)$. אזי $\frac{du}{dv} = 1\Big/\frac{dv}{du}$.

הוכחה :

$$\frac{du}{dv} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta v/\Delta u} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta u\to 0}\Delta v/\Delta u} = 1\Big/\frac{dv}{du}$$

נעזרנו בהנחה אם $\Delta v \to 0$ גם $\Delta u \to 0$ שזה נכון בכל פונקציה רציפה.

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy} \qquad\qquad x = y^{1/3}$$

דוגמאות:

$$y = x^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy} = \frac{y^{-2/3}}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3x^2}$$

לעתים קרובות נוח לבטא את העובדה ש-y פונקציה של x באמצעות משתנה שלישי הנקרא פרמטר.
כלומר גם x וגם y הם פונקציות של פרמטר t למשל :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t)$$

לכל ערך של t נקבעים x ו-y ומקבלים קשר בין x ו-y. למשל אם נציב $t = \varphi^{-1}(x)$ במשוואה השניה נקבל $y = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ - וזו פונקציה של x בלבד! לדוגמה :

$$x = 2t + 1 \qquad y = t^2 - 4$$

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 4 = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{15}{4}$$

וזוהי פרבולה.

לא תמיד נוח לחלץ ולכתוב את y כפונקציה מפורשת של x ולעתים קרובות מעניין אותנו הערך של הנגזרת $\frac{dy}{dx}$. ברור שניתן לחשב את $\frac{dx}{dt}$ ו- $\frac{dy}{dt}$. השאלה היא איך נחשב את $\frac{dy}{dx}$?

לפי כלל השרשרת :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

אבל $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, ולכן $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. אם נחזור לדוגמה הקודמת:

$x=2t+1 \quad y=t^2-4$: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2}=t$. והנגזרת בנקודה t=3 היא 3. הנקודה t=3 היא $(x,y)=(7;5)$.

באופן אחר קיבלנו ש- $y=\frac{(x-1)^2}{4}-4 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{2}=t$

כלומר התוצאה זהה בשתי השיטות. נראה עתה דוגמה פיסיקלית בהצגה פרמטרית.

מקומו של חלקיק הנע ע״פ עקומה נתון בכל זמן t ע״י המשוואות הפרמטריות:

$x=2-3\cos t \qquad y=3+2\sin t$ כאשר x ו-y נמדדים במטרים ו-t בשניות.

א. מצא את קצב השינוי בזמן של הקואורדינטה x ב- $t=\frac{\pi}{3}$ (למעשה רכיב ה-x של מהירות החלקיק ברגע הנתון).

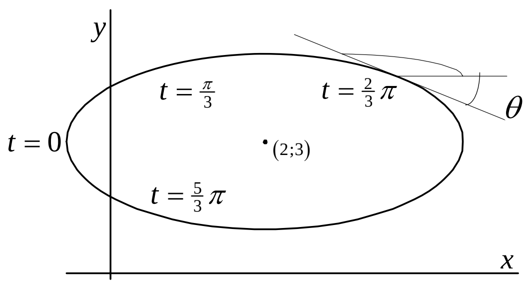
ב. מצא את קצב השינוי בזמן של הקואורדינטה y ב- $t=\frac{5\pi}{3}$ (למעשה רכיב ה-y של מהירות החלקיק ברגע הנתון).

ג. מצא את θ - זווית הנטייה של המשיק ב- $t=\frac{2\pi}{3}$ (זהו כיוון התנועה באותה שניה).

נוכל לכתוב את x כפונקציה של y:

$$\frac{y-3}{2}=\sin t \qquad \frac{x-2}{3}=-\cos t \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{y-3}{2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2=1$$

זהו הקשר בין x ל-y וזו למעשה משוואת אליפסה שמרכזה ב- $(2;3)$.



איור 6.15

א. $\frac{dx}{dt}=3\sin t$, ובנקודה $t=\frac{1}{3}\pi$ מקבלים: $\frac{dx}{dt}=3\frac{\sqrt{3}}{2}$. כלומר שקואורדינטת ה-$x$ גדלה בקצב של $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ מטרים לשניה (מהירות בכיוון x).

על מנת למצוא את המהירות: $\frac{dy}{dt}=2\cos t=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

ואז המהירות שווה ל- $\sqrt{1+\frac{9\cdot 3}{4}}=v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ שזה $\frac{\sqrt{31}}{2}$ מ׳ לשניה.

ב. $\frac{dy}{dt}=2\cos t \qquad t=\frac{5\pi}{3} \qquad \cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

קואורדינטת ה-y גדלה בקצב של 1 מ׳ לשניה.

ג. נמצא את ϑ : $\tan\vartheta = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos t}{3\sin t} = \frac{2}{3}\cot t$$

$$\vartheta = \arctan\left(\tfrac{2}{3}\cot t\right) = \arctan\left(\tfrac{2}{3}\cot\tfrac{2\pi}{3}\right) = \arctan\left(-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(-\tfrac{2\sqrt{3}}{9}\right) = -21.05^\circ$$

ד. נוכל לחשב גם גודל נוסף והוא קצב השינוי בזמן של הזווית ϑ , כלומר את $\frac{d\vartheta}{dt}$:

$$\vartheta = \arctan\left(\tfrac{2}{3}\cot t\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}}{1+\left(\frac{2}{3}\cot t\right)^2} = \frac{-6\csc^2 t}{9+4\cot^2 t}$$

ועבור $t = \frac{2\pi}{3}$ נקבל:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{9+4\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{24}{31}$$

כלומר שזווית הנטייה של המשיק קטנה בקצב (מהירות) של $\frac{24}{31}$ רדיאנים לשניה.