8. דיפרנציאלים

מושג הדיפרנציאל הינו שימושי למדי בפיסיקה. אם נתונה הפונקציה $y=f(x)$ ואנו שואלים את עצמנו בכמה משתנה הפונקציה y הודות לשינוי זעיר (אינפיניטיסימלי) Δx של x אזי :

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Delta x \; .$$

כאשר $\Delta x \to 0$ נוכל לסמן את השינוי באופן הבא : $dy = f'(x)dx$.

dy נקרא הדיפרנציאל של y, dx נקרא הדיפרנציאל של x.

המשמעות : הנגזרת של y כפול השינוי dx נותן את השינוי ב- y : dy.

דוגמאות:

(1) $d(x^2+1)=2xdx$ או
$$y=x^2+1$$
$$dy=2xdx$$

(2)
$$y=\cos(x)$$
$$dy=-\sin(x)dx$$

(3) $d\left(5e^{-x^2+3}dx\right)=-10xe^{-x^2+3}dx$

(4)
$$\tfrac{1}{2}x^{-1/2}+\tfrac{1}{2}y^{-1/2}\tfrac{dy}{dx}=0$$
$$dy=-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}dx$$

(5) $y=8\sin(x^2+1)$
$$dy=-16x\cos(x^2+1)dx$$

(6) $y=5e^{-x^2+3}$
$$dy=5(-2x)e^{-x^2+3}dx$$
$$=-10xe^{-x^2+3}dx$$

(7) נגזור $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$

$$y=e^x$$
$$dy=e^x dx$$

לתרגיל:

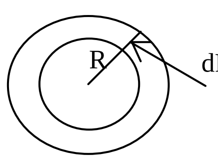
$$y=x^x$$
$$dy=?$$

$$y=\tan\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$dy=?$$

בעיות:

1) מה השינוי בנפח כדור הודות לשינוי זעיר ברדיוסו?

$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3$$
$$dV=\tfrac{dV}{dR}dR=4\pi R^2\cdot dR$$



איור 8.1

2) חשב בקירוב $\sqrt[4]{627}$, נבחין כי 627 קרוב ל 625 ששורשו הרביעי הוא 5. נתבונן בפונקציה $y=\sqrt[4]{x}=x^{1/4}$: אם $x=625$ אז $y=5$. אותנו מעניין : כאשר $\Delta x=2$ מה ערכו של $y+\Delta y$:
$y+\Delta y=\sqrt[4]{x+\Delta x}$. y ידוע ושווה ל 5, נחשב את Δy :
$dy=\frac{1}{4}x^{-3/4}dx=\frac{1}{4}(625)^{-3/4}\cdot 2=\dfrac{2}{4\cdot 5^3}=\dfrac{1}{2\cdot 125}=0.004$. לכן $y+dy=5+0.004=5.004$.

נזכיר שוב כי dy נכתב כקרוב עבור Δy , ולכן נקבל $\sqrt[4]{627}=5.004$.

3) עבור אלו ערכים של x ניתן להשתמש בביטוי $\sqrt[4]{x}$ במקום ב $\sqrt[4]{x+1}$ אם נדרוש שהשגיאה תהיה קטנה מ - 0.001? $y=\sqrt[4]{x}$

השגיאה : $\Delta y=\sqrt[4]{x+\Delta x}-\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}$.

$$dy=\tfrac{1}{4}x^{-3/4}dx=\tfrac{1}{4}x^{-3/4}\cdot 1<0.001$$

$$\frac{1}{4x^{3/4}}<0.001$$

$$4x^{3/4}>1000$$

$$x^{3/4}>250$$

$$x>(250)^{4/3}=250\sqrt[3]{250}=250\cdot 6.3=1575$$

זאת אומרת שעבור $x>1575$ השגיאה בשימוש ב $\sqrt[4]{x}$ במקום ב $\sqrt[4]{x+1}$ תהיה קטנה מ 0.001.

מתי השגיאה תיהיה קטנה מאחוז אחד ?

$$\frac{dy}{y}<0.01$$

$$\frac{x^{-3/4}}{4x^{1/4}}<0.01$$

$$\frac{1}{x}<0.04$$

$$x>25$$

בדרך כלל בכדי למצוא את השגיאה היחסית (באחוזים) של פונקציה $y=f(x)$ נקח $\ln y=\ln f(x)$.

נחשב הדיפרנציאל בשני האגפים ונקבל $\frac{1}{y}dy=\frac{f'(x)}{f(x)}dx$, וזה במקרים רבים פשוט יותר.

לדוגמה :

רדיוס כדור 10 מ׳ עם אפשרות שגיאה של 0.02 מ׳, מה השגיאה היחסית בנפח הכדור?

מתוך $V=\frac{4\Pi}{3}r^3$ מצאנו $dV=4\pi r^2dr$ נחלק ב V ונמצא פתרון. אולם נוכל לבצע את החישוב בדרך אחרת

$\ln V=\ln\frac{4\pi}{3}r^3=\ln\frac{4\pi}{3}+3\ln r$ נגזור ונקבל $\frac{dV}{V}=3\frac{dr}{r}=\frac{3\cdot 0.02}{10}=0.006$, כלומר באחוזים השגיאה בנפח הכדור היא 0.6%.