<u>16. טורים עם אברים חיובים ושליליים</u>

עד כה עסקנו רק בטורים עם אברים חיוביים. בטור אשר כל אבריו שליליים ניתן לטפל כמו בטור חיובי עם סימן -1 לפניו. בפרק זה עיקר עניינו יהיה בטורים אשר סימניהם מתחלפים.

<u>16.1 טור עם סימנים מתחלפים</u>

<u>הגדרה</u>: טור אשר אבריו חיוביים ושליליים לסרוגין נקרא טור עם סימנים מתחלפים, "alternating series"

כלומר אם $a_n > 0$ לכל n, הטור

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

נקרא טור שסימניו מתחלפים או טור **<u>מתחלף</u>**.

לטור כזה ישנו משפט המתיחס אליו באופן חשוב ונקרא משפט לייבניץ.

<u>16.2 משפט לייבניץ:</u> הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ מתכנס אם לכל n

(החל מ-n סופי כלשהו) קיים:

א. $a_n > a_{n+1}$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

אנו רואים איפוא שלטור מתחלף יש תנאים קלים יותר להתכנסות מאשר לטור חיובי והיסבה היא כמובן שבטור כזה האברים החיוביים והשליליים מקזזים אחד את השני.

לדוגמה:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

טור זה מקיים את משפט לייבניץ

א. $a_n > a_{n+1}$ כי $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

ולכן הטור מתכנס.

נאשר זאת בגישה אחרת

נחבר זוגות באופן הבא

$$(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{6}) + (\frac{1}{7}-\frac{1}{8}) + \ldots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

טור זה מתכנס לפי מבחן ההשוואה

$$\frac{1}{(2n-1)2n} < \frac{1}{n^2}$$

מכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס,

גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ מתכנס.

כלומר טור הרמוני מתחלף **מתכנס!**

דוגמה נוספת:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$$

טור זה מקיים אף הוא תנאי לייבניץ

א. $a_n>a_{n+1}$ כי $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ לכל n

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

ולכן הוא מתכנס.

<u>**הערה חשובה**</u> : מדוע צריך את שני התנאים והתנאי השני בלבד אינו מספיק. נתבונן בטור

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\dots$$

הטור הזה מקיים תנאי ב' של לייבניץ ולא תנאי א'. ואמנם הוא לא מתכנס שכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר!

ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס! ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ מתבדר!

<u>16.3 התכנסות בהחלט ובתנאי</u>

הגדרה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**

אם גם טור הערכים המחלטים $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתבדר הטור נקרא **מתכנס בתנאי.**

דוגמאות:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\dots$$

הטור מתכנס **בהחלט** שכן טור הערכים המחלטים: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס.

לעומת זאת הטור

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

מתכנס **בתנאי** שכן טור זה מתכנס ואילו טור הערכים המחלטים (דהינו הטור ההרמוני) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר!

הערות:

I. כל טור חיובי מתכנס הוא מתכנס בהחלט.

II. כל טור המתכנס בהחלט הוא מתכנס. שכן אם הוא מתכנס בערכו המחלטים ודאי שיתכנס בלי ערכים מחלטים.

2) בדוק התכנסות הטור $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum(-1)^n a_n$

האבר הכללי $a_n=\frac{1}{2n+1}$

קיים א. $a_n>a_{n+1}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

לכן לפי משפט לייבניץ הטור מתכנס.

נבדוק האם מתכנס בהחלט או בתנאי

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ מתבדר.

ולכן הטור **מתכנס בתנאי.**

3) בדוק את התכנסות הטור $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots$

טור זה מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המחלטים $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

4) בדוק התכנסות הטור: $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\ldots$

טור זה מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המחלטים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ מתכנס.

5) בדוק התכנסות בהחלט או בתנאי של הטורים הבאים:

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2 n}$ ג. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ בערך מחלט הטור הוא $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

$\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^{\infty}=\infty$ מתבדר ולכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ אינו מתכנס בהחלט.

נבדוק אם מתכנס בתנאי לפי משפט לייבניץ. קיים

א. $a_n>a_{n+1}$ כי $\frac{n}{n^2+1}>\frac{n+1}{(n+1)^2+1}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

ולכן הטור מתכנס בתנאי.

ב. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2 n}$ נבדוק התכנסות בהחלט

נציב $U=\ln x$ $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x^2}dx=\int\limits_{\ln 2}^{\infty}\frac{dU}{U^2}=-\frac{1}{U}\Big|_{\ln 2}^{\ln\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln^2 2}{2}=\infty$$

ולכן הטור מתבדר.

<u>16.4 מבחן המנה להתכנסות בהחלט:</u>

הטור $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ עם אברים מעורבים מתכנס בהחלט אם

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

ומתבדר כאשר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$

אם הגבול הוא 1 המבחן אינו קובע התכנסות או התבדרות.

החלק הראשון ברור לפי מבחן המנה.

החלק השני גם ברור שכן אם

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}|>\lim_{n\to\infty}|a_n|$$

לא יתכן $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ ולכן הטור מתבדר.

ז״א זו בדיקה מקבילה לבדיקה של לייבניץ, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.