18. פתוח פונקציה לטור

18.1 טור מקלורן:

נתונה פונקציה f(x) ניתן לפתחה לטור באופן הבא:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

כאשר $a_0=f(0)$

$$f'(x)\big|_{x=0}=f'(0)=a_1$$
$$f''(x)\big|_{x=0}=f''(0)=2a_2$$
$$f'''(x)\big|_{x=0}=f'''(0)=3a_3$$
$$f^{(n)}(x)\big|_{x=0}=f^{(n)}(0)=n!a_n$$

ולכן ניתן לכתוב

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dots$$

כלומר מצאנו שיטה איך לפתח פונקציה לטור חזקות ב-x.

רדיוס ההתכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(0)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)}\right|(n+1)$$

דוגמאות:

$$f(x)=\sin x$$
$$f(0)=\sin 0=0$$
$$f'(0)=\cos x\big|_{x=0}=\cos 0=1$$
$$f''(0)=\sin x\big|_{x=0}=\sin 0=0$$
$$f'''(0)=-\cos x\big|_{x=0}=-\cos 0=-1$$
$$f^{(4)}(0)=\sin x\big|_{x=0}=\sin 0=0$$
$$f^{(5)}(0)=\cos x\big|_{x=0}=\cos 0=1$$

ולכן נקבל
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

נתבונן בדוגמה של פתוח לטור גאומטרי

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\qquad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\qquad f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$$
$$f(0)=1\qquad f'(0)=1\qquad f''(0)=2!=2\qquad f'''(0)=3!=2\cdot 3$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\dots$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

ואמנם זה הטור שקבלנו קודם עבור טור גאומטרי.

נעבור לדוגמה נוספת שאף אותה כבר ראינו בדרך אחרת.

$$f(x)=\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$f(0)=\ln 1=0 \qquad f'(0)=1 \qquad f''(0)=-1 \qquad f'''(0)=2 \qquad f^{(4)}(0)=-3!$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

כפי שראינו למעלה.

פתוח מעניין הוא של הפונקציה $f(x)=e^x$

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$$

ולכן

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

מהו רדיוס ההתכנסות של הפתוח

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

כלומר הטור מתכנס לכל x.

דוגמה מענינת וחשובה היא פתוח פו' הבאה:

לכל μ $\quad f(x)=(1+x)^{\mu}$

נזכיר שעבור $\mu=n$ (n טבעי) קיים הפתוח

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^n x^k=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$$

כאשר C_k^n הם מקדמי הבינום של ניוטון

$$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

כאן נמצא עתה פתוח כללי לפו' הזו.

$$f(x)=(1+x)^{\mu} \qquad f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1} \qquad f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$$

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=\mu \qquad f''(0)=\mu(\mu-1) \qquad f'''(0)=\mu(\mu-1)(\mu-2)$$

ולכן נקבל

$$f(x)=(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{1}{2!}\mu(\mu-1)x^2+\frac{1}{3!}\mu(\mu-1)(\mu-2)x^3+\ldots$$

רואים איפוא שהפתוח הנ"ל נכון לכל μ ממשי אלא שכאן קבלנו טור אינסופי אלא אם כן μ טבעי!!

נבדוק רדיוס ההתכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{\frac{1}{(n+1)!}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\mu-n}\right|=1$$

כלומר עבור μ שאינו מספר טבעי מקבלים טור חזקות אינסופי המתכנס עבור $-1<x<1$

ואילו אם $\mu=n$ טבעי הטור האינסופי הופך לסופי לפולינום מסדר n
ולכן הוא מתכנס לכל x.
דוגמאות לפתוח לטור:

אם $\mu=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{2\cdot 2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4+\dots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\dots$$

באותו אופן עבור $\mu=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\dots$$

18.2 טור טיילור

לעתים קרובות מענינים בפתוח טור בחזקות של $x-x_0$
זה נקרא טור טיילור ואז אפשר להוכיח שקיים הפתוח הבא ל-f(x):

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\dots\dots$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\dots$$

נוסחה מקלורן היא איפוא מקרה פרטי של נוסחת טילור, עבור $x_0=0$.

דוגמאות: פתח את $e^{\frac{x}{2}}$ בחזקות של $x-2$

$$f(x)=e^{\frac{x}{2}} \qquad f(2)=e$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \qquad f'(2)=\frac{1}{2}e$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} \qquad f''(2)=\frac{1}{4}e$$

$$e^{\frac{x}{2}}=e+\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2!}\frac{1}{4}e(x-2)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{8}e(x-2)^3+\dots=$$

$$=e\left\{\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2!}\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{8}(x-2)^3+\dots+\frac{1}{2^n}\frac{(x-2)^n}{n!}+\dots\right\}$$

נבדוק תחום ההתכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!}\right|=2\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

והטור מתכנס לכל x.

פתח את $\ln x$ בחזקות של $x-2$.

$$f(x)=\ln x \qquad f(2)=\ln 2$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f''(2)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \qquad f'''(2)=\frac{1}{4}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4} \qquad f^{(4)}(2)=-\frac{3}{8}$$

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!}-\frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{1}{24}(x-2)^3-\frac{1}{64}(x-2)^4+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{2^n n}+\ldots$$

חוץ מ- $n=0$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2 \qquad |x-2|<2$$

הטור מתכנס ב- $0<x<4$

ב $x=0$ מתקבל טור הרמוני וזה מתבדר

ב $x=4$ מקבלים $\ln 2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ טור הרמוני מתחלף ולכן יש התכנסות

בתחום $0<x\le 4$.

18.3 השארית

הערכת השגיאה. בארך של $f(x)$ אם לוקחים מספר סופי של אברים נעשית באופן הבא:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}$$

נניח שהבאנו בחשבון $n-1$ אברים

אזי השגיאה שעשינו בכך שלא לקחנו אינסוף אברים ניתנת ע"י השארית

$$R_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$$

כאשר ξ נמצא בין x ל- x_0.

לדוגמה:

חישבנו הפיתוח של $\ln x$ סביב $x=2$

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{1}{24}(x-2)^3-\frac{1}{64}(x-2)^4+\ldots$$

נחשב $\ln 2.01$

ע"י 2 אברים הראשונים ונעריך השגיאה.

$$\ln 2.01=\ln 2+\frac{1}{2}0.01=\ln 2+0.005$$

$$R_2=\frac{1}{2!}f^{(2)}(\xi)(2.01-2)^2=\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)0.01^2$$

$$R_2 = -\frac{1}{2!}\frac{1}{\xi^2}\cdot 10^{-4}$$

$2 < \xi < 2.01$ ערך השגיאה המכסימלית כאשר $\xi = 2$ ולכן

$$R_2 = -\frac{1}{2!}\frac{1}{4}\cdot 10^{-4} = \frac{10^{-4}}{8}$$

כלומר השגיאה קטנה מ- $\frac{10^{-4}}{8}$

דוגמה נוספת

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-0.1} = 1 + 0.1 + (0.1)^2 + (\text{שארית שגיאה})$$

נבדוק מה הוא השארית או השגיאה

$0 < \xi < 0.1$

$$R_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(0.1)^3 = \frac{1}{3!}\frac{3!}{(1-\xi)^4}(0.1)^3$$

זו הערכה מכסימלית לשגיאה

השגיאה המכסימלית תהיה עבור $\xi = 0.1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

ולכן תהיה $\frac{(0.1)^3}{(0.9)^4} = \frac{10}{9^4}$

כלומר סכום כל האברים ואמנם: $(0.1)^3 + (0.1)^4 + \dots = \frac{(0.1)^3}{1-0.1} < \frac{1}{9^3}$