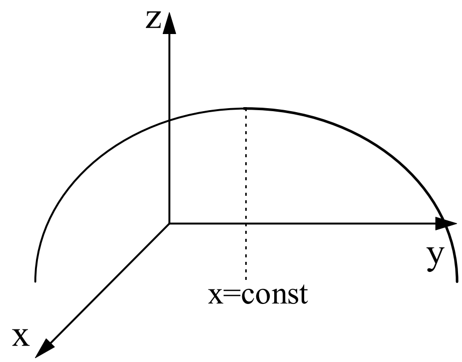
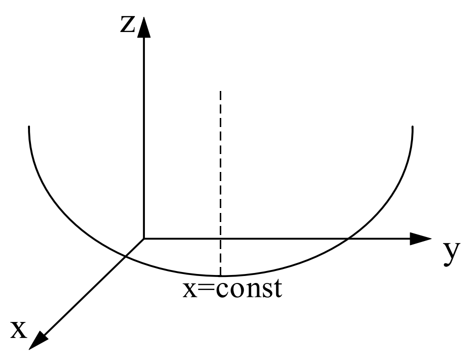
22. נקודות קיצוניות של פונקציה בעלת שני משתנים.

כפי שראינו הפונקציה $z = f(x,y)$ מתארת משטח במרחב התלת ממדי. נניח שלפונקציה יש איזה מינימום או מכסימום מקומי.



איור 22.1



איור 22.2

נניח שיש מינימום או מכסימום בנקודה (x_0, y_0). אזי בשני המקרים יתקיים:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0 y_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0 y_0} = 0$$

כי לאורך כל קו על המשטח מקביל למישור xy או xz ועובר דרך (x_0, y_0) יש נקודה קיצונית.

כמו כן למינימום קיים $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0 y_0}$ וכן $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0 y_0}$ חיובים.

ועבור מקסימום $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0 y_0}$; $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0 y_0}$ שליליים.

תוצאות אלו נובעות ממה שלמדנו עבור פונקציות בעלות משתנה אחד.
זאת מכיון שכאשר שומרים על משתנה אחד קבוע (x או y) הפונקציה z הופכת להיות פונקציה של משתנה אחד בלבד!
אלו תנאים הכרחיים ולא מספיקים. כלומר אם קיימת נקודה מינימום או מקסימום יתקיימו המקרים הנ"ל. זוהי איפוא דרך למצוא נקודות קיצוניות אפשריות.
כדי לאשר שאמנם אלו נקודות קיצוניות (מכסימום או מינימום) צריך להוסיף תנאי מספיק:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0} \quad \textbf{(22.1)}$$

דוגמה:

נתונה פונקציה: $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

מצא נקודות קיצוניות. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2$

הפתרון: $y = \frac{1}{3} \qquad x = -\frac{4}{3}$

בנקודה זו תתכן נקודה קיצונית.

נבדוק האם היא מכסימום או מינימום: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

ולכן יתכן שנקודה זו היא מינימום:
נבדוק את התנאי המספיק:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y)} \right)^2 = (-1)^2$$

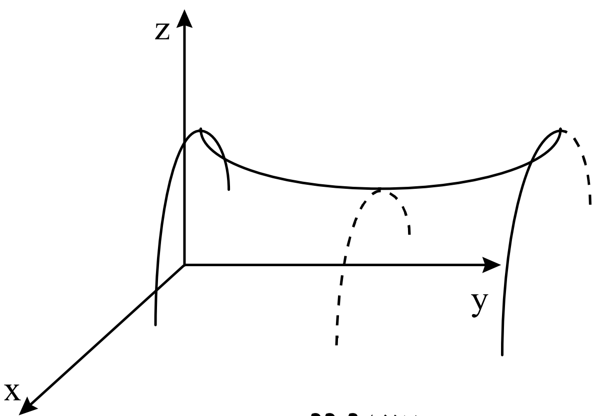
$$(-1)^2 - 2 \cdot 2 < 0$$

התנאי המספיק מתקיים ולכן הנקודה $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ הינה נקודת **מינימום.**

נקודת אוכף: יש גם מקרה מעניין נוסף שקורה לעתים והוא נקרא נקודת אוכף, ראה איור.

בנקודת אוכף יש מינימום לאורך ציר אחד ומכסימום לאורך ציר אחר

באיור רואים מכסימום לאורך ציר x ומינימום לאורך ציר y.



איור 22.3

בנקודת אוכף יתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ותנאי נוסף שחייב להתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

שונה מסימנו מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. באיור הנ"ל

מכסימום לאורך ציר x, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,

ומינימום לאורך ציר y, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$.

שים לב: עבור נקודת אוכף אי השוויון (22.1) לא יכול להתקיים.

דוגמה: מצא מכסימום ומינימום ונקודת אוכף של הפונקציה: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

על מנת לבדוק אם יש נקודות קיצוניות, צריך לפתור את צמד המשוואות:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$

הפתרון: $x = 0$, $y = 0$. בנקודה זו ישנה אפשרות לנקודה קיצונית. נבדוק את התנאי (22.1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - (2)(-2) = 4 > 0$$

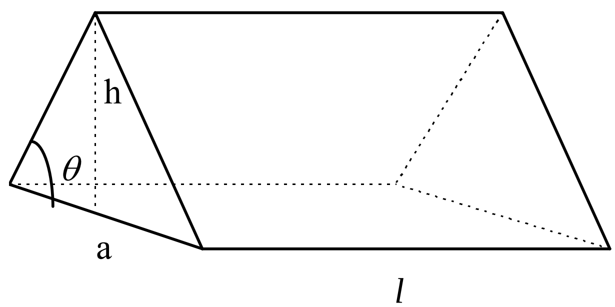
לכן $(0,0)$ אינה נקודת מינימום או מקסימום , אלא **נקודת אוכף**. בד"כ אין צורך לבדוק את התנאי המספיק . זה נובע מכן שהנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ שונה בסימן מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

משתמשים בו רק במקרה הכרחי , בדרך כלל אפשר לומר מהבעיה עצמה אם יש מקסימום או מינימום או אף אחד מהם.

<u>דוגמה שימושית:</u>

מעוניינים לבנות פנים של מנסרה משולשת (משולש שווה שוקיים) בעלת נפח V (ללא בסיס) ומעוניינים להשתמש במינימום חומר (ראה איור).

חשב את מידותיה היחסיות של המנסרה?



איור 22.4

גובה המשולש: $h=\frac{a}{2}tg\theta$

שוק המשולש: $\frac{a}{2\cos\theta}$

נפח המנסרה:

$$V=\frac{a\cdot l}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta=\frac{a^2 l}{4}tg\theta$$

שטח הפנים (ללא הבסיס):

$$A=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta+\frac{a}{2\cos\theta}\cdot 2l$$

למשוואה זו יש שלשה משתנים a,θ, ו- l. אלא שהם תלויים באמצעות המשוואה של הנפח שנתון שהוא קבוע. מהמשוואה של הנפח נחלץ את l,

$$l=\frac{4\cdot V}{\mathrm{a}^2 tg\theta}$$

ונציב ב-A:

$$A=\frac{a^2}{2}tg\theta+\frac{a}{\cos\theta}\frac{4\cdot V}{a^2 tg\theta}=\frac{a^2}{2}tg\theta+\frac{4\cdot V}{a\sin\theta}$$

קיבלנו את A כפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים a ו θ. על מנת למצוא מינימום ל- A נשוה את $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\theta}$ ו- $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{a}}$ לאפס.

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\theta}=\frac{a^2}{2}\sec^2\theta-\frac{4\cdot V}{a}\csc\theta\cot\theta=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{a}}=atg\theta-\frac{4\cdot V}{a^2\sin\theta}=0$$

מהמשוואה הראשונה:

$$a^3=\frac{8\cdot V\csc\theta\cot\theta}{\sec^2\theta}$$

מהמשוואה השניה:

$$a^3=\frac{4\cdot V}{\sin\theta\ \mathrm{tg}\theta}=\frac{4\cdot V\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

מכאן:

$$\frac{4\cdot \mathrm{V}\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{8\cdot V\csc\theta\cot\theta}{\sec^2\theta}$$

לאחר חילוק ב- 4V נקבל:

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta\cot\theta}{\sin^2\theta}$$

$\cos\theta=0$ אינה פתרון כי המקרה $\theta=90^0$ אינו מנסרה (פתרון שיתן מכסימום)

הפתרון שנשאר: $\theta=45^0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta=\frac{1}{2}$

כלומר:

$$V=\frac{1}{4}a^2 l tg\theta=\frac{1}{4}a^2 l$$

קיים גם קשר בין a ו- l

$$a^3=\frac{4\cdot V}{\sin\theta\ \mathrm{tg}\theta}=\frac{4\cdot V\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 1}=4\sqrt{2}\cdot V=\sqrt{2}\cdot a^2 l$$

$$a=\sqrt{2}\cdot l$$

עבור גדלים אלו מתקבל שטח פנים מינימלי.

הערה: על מנת לחשב מינימום שטח המעטפת ניקח: $A=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}tg\theta+\frac{a}{2\cos\theta}\cdot 2l+l\cdot a$

ונמשיך באותה דרך!