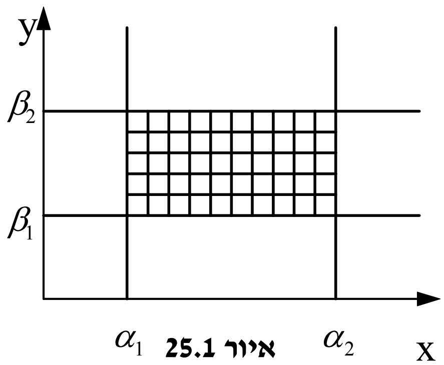
25. אנטגרלים כפולים.

נתונה פונקציה $f(x,y)$ המוגדרת במלבן הבא במישור (x,y) (ראה באיור).



איור 25.1

נגדיר את הסמל הבא $\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,y)dxdy$

במובן הבא: $\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,y)dx\right]dy$

כלומר תחילה נבצע אנטגרל על הפונקציה $f(x,y)$ לפי משתנה x בין הגבולות α_1 ו- α_2, כאשר y נלקח כקבוע.
תוצאה של אנטגרל זה היא פונקציה של y ועליה מבצעים אנטגרל לפי משתנה y בין הגבולות β_1 ו- β_2.
גודל זה נקרא בשם **אנטגרל כפול.**

לדוגמה:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\left(x^2+5xy-ye^{-\mathrm{axy}}\right)dxdy$$

נבצע תחילה אנטגרל על x

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2y}{2}-\frac{y}{(-ay)}e^{-axy}\right\}_0^1 dy=$$

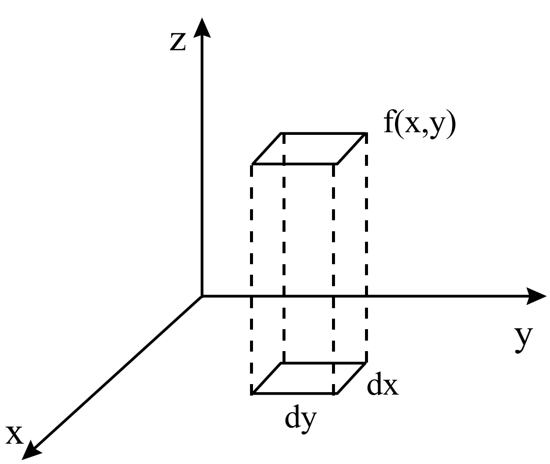
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{5y}{2}+\frac{1}{a}e^{-\mathrm{ay}}-\frac{1}{a}\right)dy=$$

$$\left(\frac{1}{3}y+\frac{5y^2}{2}-\frac{1}{a^2}e^{-\mathrm{ay}}-\frac{1}{a}y\right)_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{a^2}\left(e^{-a}-e^{a}\right)-\frac{2}{a}$$

25.1 המשמעות הגאומטרית של האנטגרל הכפול.

אם נתבונן במרחב התלת ממדי נוכל להבין את $f(x,y)$ כמשטח במרחב לכל נקודה (x,y) מתאימה נקודה $f(x,y)$ במרחב. את הגודל $dxdy$ ניתן להבין כאלמנט שטח אינפיניטזימלי במישור xy. ואז $f(x,y)dxdy$ הוא למעשה אלמנט נפח (ראה איור).

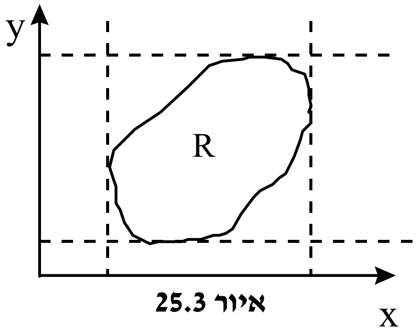
כפי שכבר ראינו משמעות אנטגרל הוא סכום. הרי **האנטגרל הכפול** יהיה סכום כל אלמנטי הנפח הללו. כלומר האנטגרל יהיה הנפח הכלוא בין המשטח $f(x,y)$ למישור xy.
בדוגמה הקודמת הסכום יעשה על כל התיבות שבסיסם dxdy וגבהם $f(x,y)$ הנמצאות בתוך המלבן $y=\beta_2, y=\beta_1, x=\alpha_2, x=\alpha_1$.



איור 25.2

אם נניח שבמישור x,y אנו מעוניינים בתחום R
שהוא שונה ממלבן או באופן כללי נכתוב:

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$



איור 25.3

אנטגרל זה יתן לנו **את הנפח** הכלוא **בין התחום R לבין** חלק **המשטח ש- R הוא הטלו.**

הערה: אנטגרל זה מחשב את הנפח מכיוון ששטח הבסיס של כל תיבה הוא dxdy_ שואף לאפס. לכן ניתן לכתוב הנפח כסכום של נפחים של תיבות!

נשאלת השאלה איך לתאר את הגבולות R כגבולות האנטגרציה במקרה כללי כאשר R אינו מלבן .

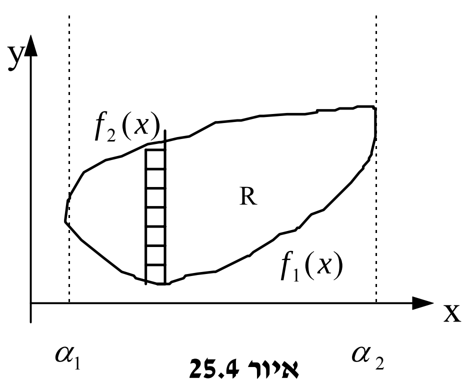
כאשר R מלבן, כתבנו:
$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,y)dxdy$$

אנטגרל זה מסכם קודם על תיבות לאורך ציר x ואחר כך על פרוסות לאורך ציר y.

או:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x,y)dydx$$

אנטגרל זה מסכם קודם על תיבות לאורך ציר y ואחר כך על פרוסות לאורך ציר x.
שני אנטגרלים אלה זהים כיון ששניהם נותנים אותו נפח .
כיצד נטפל במקרה הכללי?



איור 25.4

קח תחילה את המקרה בו
נבצע תחילה אינטגרל על y .

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

y משתנה מ $f_1(x)$ עד $f_2(x)$.

האנטגרל הראשון $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$

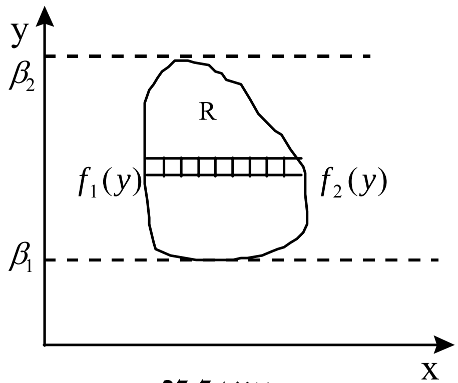
נותן פונקציה של x בלבד
ואז בודקים כיצד משתנה של x .
רואים מהאיור ש-x משתנה מ- α_1 עד α_2 .

נוכל גם לבצע תחילה את אנטגרל על x .

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

ואז x משתנה מ- $f_1(y)$ ל- $f_2(y)$

ואילו y משתנה מ- β_1 ל- β_2 .

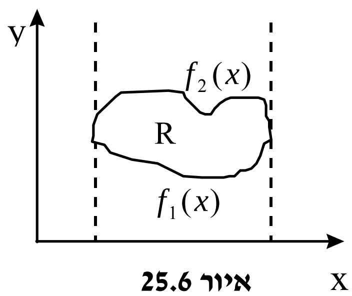


איור 25.5

שני דרכים אלו מביאות לאותה תוצאה:
לנפח הכלוא בין התחום **R** לבין חלק
המשטח $f(x,y)$ ש- **R** הוא הטלו.

באנטגרל הראשון מסכמים קודם על עמודות לאורך ציר y ואחר כך פרוסות לאורך ציר x. באנטגרל השני מסכמים קודם על עמודות לאורך ציר x ואחר כך על פרוסות לאורך ציר y.

הערה: נבחר את סדר האנטגרציה כך שיהיה יותר נוח. אם ניתן לכתוב את התחום כשתי פונקציות חד ערכיות באחד הצירים (x או y) נבחר ציר זה להיות אנטגרל הראשון.
אם למשל R יהיה באופן הבא (ראה איור)
כדאי לבחור קודם את האנטגרל
על y שכן רק לאורך ציר x נוכל לכתוב
את התחום בין שתי פונקציות חד ערכיות.



איור 25.6

דוגמאות:

1) חשב את האנטגרל:

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} dydx$$

ותן לו משמעות גאומטרית.

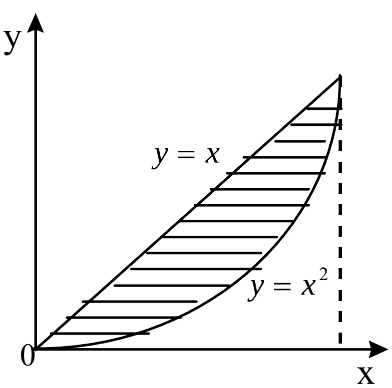
$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} dydx = \int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} dy\right]dx = \int_0^1 (x-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

משמעות:

נתאר R במישור xy. האנטגרל
נותן את השטח בין שני הקוים.
או נפח השווה לשטח הנ"ל כפול יחידה,
כי ניתן לומר $f(x,y)=1$
לכל x ו-y.

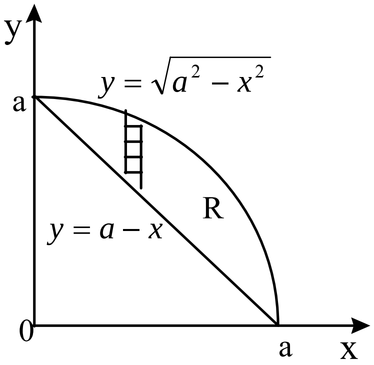
הערה: שטח כזה מצאנו גם בשיטה אחרת:

$$\int_0^1 xdx - \int_0^2 x^2dx = \int_0^1 (x-x^2)dx$$



איור 25.7

2) חשב $\iint_R ydxdy$ כאשר R הוא השטח באיור.



איור 25.8

$$\iint_R ydxdy=\int_0^a\left(\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}}ydy\right)dx=$$

$$\int_0^a\left(\frac{\left(a^2-x^2\right)}{2}-\frac{(a-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$\int_0^a(ax-x^2)dx=$$

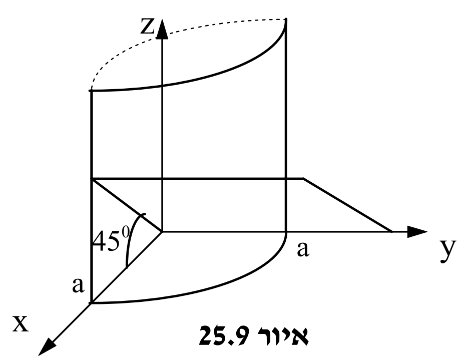
$$\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

3) חשב:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta}\sin\theta d\rho d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{\cos\theta}\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{6}\cos^3\theta\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

4) מצא את הנפח הנחתך מהגליל $x^2+y^2=a^2$ על ידי המישורים $z=0$, $z=x$.

לאלמנט שטח $dxdy$ שייך נפח $xdydx$ ולכן ס"כ הנפח יהיה:



איור 25.9

$$\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}xdydx=\int_0^a x2\sqrt{a^2-x^2}dx=$$

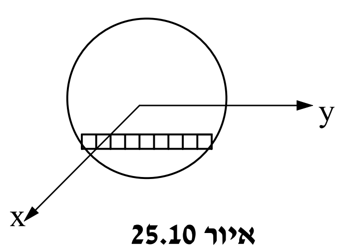
נציב $dU=-2xdy$ $\sqrt{a^2-x^2}=U$

$$=-\int_{a^2}^{0}dU\cdot U^{\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}U\cdot U^{\frac{3}{2}}\bigg|_{a^2}^{0}=\frac{3}{2}a^3$$

אפשר גם כמובן לבצע את האנטגרל קודם על x ואח"כ על y ואז יראה האנטגרל:

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^{2a}}}xdxdy=\int_{-a}^{a}\frac{a^2-y^2}{2}dy=\left(\frac{a^2y}{2}-\frac{y^3}{6}\right)_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{6}+\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{6}=\frac{2}{3}a^3$$



איור 25.10

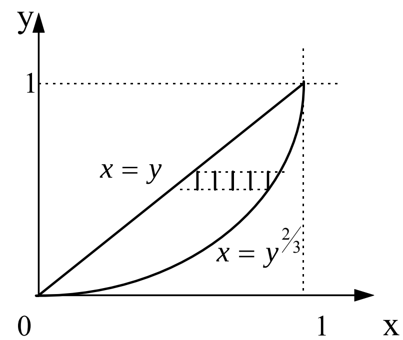
5) חשב $\iint_R dA$ $\left(dA=dxdy\right)$ כאשר R הוא השטח ברבוע הראשון החסום ע"י הקווים $y^2=x^3$ והישר $y=x$.

הישר והעקומה נחתכים בנקודות: $x_2=1,y_2=1;x_1=0,y_1=0$.

נפתור בשני דרכים.

דרך א':

אנטגרציה נבצע תחילה לאורך רצועה אופקית (קודם על x) מ- $x=y$ עד $x=y^{2/3}$ ואח"כ נסכם על כל הרצועות לפי y מ- $y=0$ עד $y=1$.

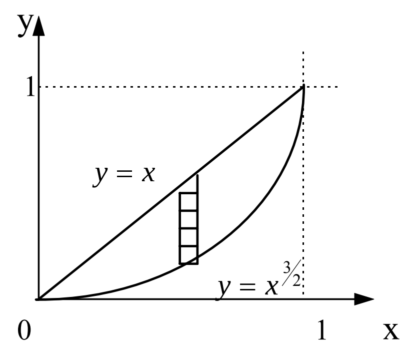


איור 25.11

$$\iint_R dA=\int_0^1\int_y^{y^{2/3}}dxdy=\int_0^1\left(y^{2/3}-y\right)dy=$$
$$=\left(\frac{3y^{5/3}}{5}-\frac{y^2}{2}\right)_0^1=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

דרך ב':

נבצע אנטגרל על פני רצועה אנכית תחילה (קודם על y) מ- $y=x^{3/2}$ עד $y=x$ ואח"כ על x מ- 0 עד 1.



איור 25.12

$$\iint_R dA=\int_0^1\int_{x^{3/2}}^{x}dydx=\int_0^1\left(x-x^{3/2}\right)dx=$$
$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)_0^1=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

דוגמאות פיזיקליות:

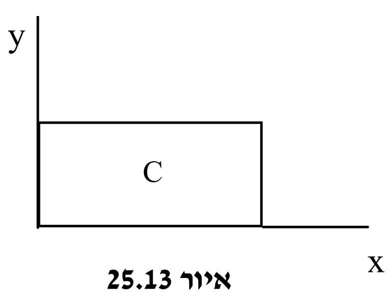
מרכז המסה: מרכז כובד של גוף מישורי בעל מסה אחידה נקבע על פי נוסחה:

$$\bar{x}=\frac{\iint_R xdA}{\iint_R dA}\qquad \bar{y}=\frac{\iint_R ydA}{\iint_R dA}$$

הסבר: $\bar{x}=\frac{\sum xdm}{\sum dm}=\frac{\int xdm}{\int dm}$ ואם נציב $dm=\rho dA$

ונניח ρ קבוע נקבל הנוסחה הנ"ל.

מרכז הכובד הוא אותה נקודה שאפשר לראות בה את כל המסה מרוכזת ונותנת אותו מומנט כמו רצף המסה (ראה איור). בעזרת האנטגרל הכפול נוכל למצוא עתה מרכזי מסה של גופים שאינם סימטריים.

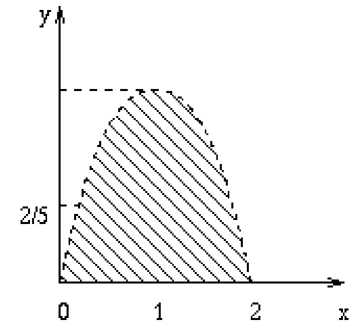


איור 25.13

1)מצא את מרכז המסה של השטח המישורי המוגבל ע"י הפרבולה: $y=2x-x^2$ וציר ה- x.

ברור שמבחינה סימטרית ש- $\bar{x}$ יהיה **1**.

נחשב:



$$\bar{x}=\frac{\iint_R xdA}{\iint_R dA}=\frac{\int_0^2\int_0^{2x-x^2} xdydx}{\int_0^2\int_0^{2x-x^2} dydx}=\frac{\int_0^2 x(2x-x^2)dx}{\int_0^2 (2x-x^2)dx}$$

איור 25.14

$$\bar{x}=\frac{\int_0^2 (2x^2-x^3)dx}{\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^2}=\frac{\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{x^4}{4}\right)_0^2}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{16}{3}-4}{\frac{4}{3}}=1$$

נחשב את $\bar{y}$:

$$\bar{y}=\frac{\iint_R ydA}{\iint_R dA}=\frac{\int_0^2\int_0^{2x-x^2} ydydx}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\int_0^2\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2}dx=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{10}\right)_0^2=\frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-8+\frac{32}{10}\right)=\frac{2}{5}$$

מרכז הכובד בציר y הוא :

$$\bar{y}=\frac{2}{5}$$

נקודת מרכז הכובד היא איפה : $(\bar{x},\bar{y})=\left(1,\frac{2}{5}\right)$.

מומנט התמדה: נראה עתה כיצד מחשבים מומנט התמדה של שטחים מישוריים.

מומנט התמדה ביחס לציר x מוגדר ע״י סכום של מכפלת כל אלמנט מסה Δm_i ברבוע המרחק מציר x, y_i^2 :

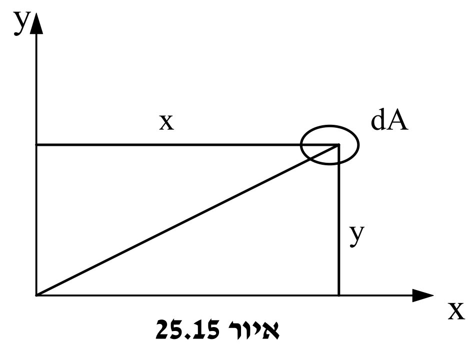
$$I_x=\sum_i y_i^2\Delta m_i$$

במסה רציפה נקבל בכתיבת אנטגרלית :

$$I_x=\int y^2dm=\int\rho\, y^2dA\quad(\mathrm{dm}=\rho\,\mathrm{dA})$$

אם נניח ρ קבוע =1 נקבל:

$$I_x = \iint_R y^2 dA$$ ביחס לציר x

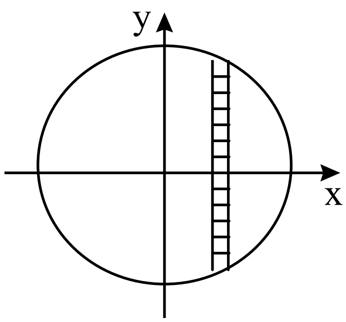


איור 25.15

באותו אופן מומנט התמדה ביחס לציר y יהיה:

$$I_y = \iint_R x^2 dA$$ ביחס לציר y

דוגמה: מצא מומנט ההתמדה של דיסקית שרדיוסה a ביחס לציר x וביחס לציר העובר בראשית ונצב לדיסקית.



איור 25.16

משוואת המעגל: $x^2 + y^2 = a^2$

$$I_x = \iint_R y^2 dA = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-a}^{a} 2(a^2 - x^2)^{3/2} dx$$

נציב:

$$x = a \sin\theta$$

$$dx = a\cos\theta \, d\theta$$

ונקבל: $I_x = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^4 \cos^3\theta \cos\theta \, d\theta$

נחשב $\int \cos^4 x dx$

$$\int \cos^4 x dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[x + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x) dx\right] = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{\sin 4x}{32}$$

$$I_x = \frac{2}{3} a^4 \left(\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \cdot a^4}{4}$$

תוצאה שודאי נפגשתם כבר בפיסיקה.
דרך זו היא מסובכת למדי בהמשך נראה דרך קלה ביותר להגיע לאותה תוצאה.
נחשב עתה את מומנט ההתמדה ביחס לציר העובר דרך הראשית:

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \iint (x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y$$

אבל מסימטריה $I_y = I_x$

ולכן

$$I_0 = 2I_x = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}$$