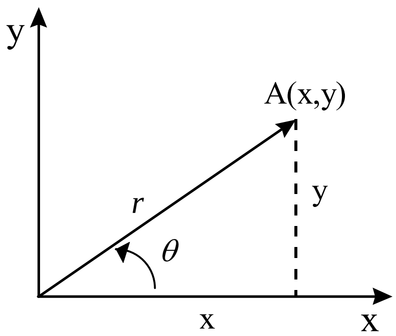
# 26. יעקוביאן

## 26.1 קואורדינטות פולריות

בהרבה מקרים מערכת הצירים הקרטזית (ישרת הזוית) אינה יעילה בחשוב אנטגרל כפול. צורת המשטח שעליו מבצעים את האנטגרציה תציע לנו את מערכת הקואורדינטות הרצויה לפתרון הבעיה.




איור 26.1

**דוגמה** מאוד פשוטה למערכת צירים אחרת היא המערכת הפולרית (ראה איור 26.1). נתונה נקודה $A=(x,y)$ נציין את מרחק הנקודה מהראשית ב- $r$ ואת הזווית ב- $r$ יוצר עם כוון $x$ חיובי ב- $\theta$.

נוכל לומר שכל נקודה במישור ניתנת לקביעה ע״י $r$ ו-$\theta$ ולהפך כל $r$ ו- $\theta$ קובעים נקודה במישור. זאת אומרת הזוג $(r,\theta)$ קובע באופן חד משמעי את הנקודה בה מדובר ונותן אותה אינפורמציה כמו הזוג $(x,y)$ בו השתמשנו עד כה.

הזוג $(r,\theta)$ נקרא בשם **קואורדינטות פולריות**.

נראה עתה מה הקשר בין הקואורדינטות הפולריות לקוארדינטות הקרטזיות.

מהאיור הנ״ל (איור 26.1) ברור כי:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ולהפך:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctg\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

המטרה שלנו עתה תהיה ללמוד איך לעבור מאנטגרל על x ו-y לאנטגרל על $r$ ו- $\theta$.

**למשל** נתון האנטגרל:

$$\iint_R f(x,y)dA$$

כדי לעבור למשתנה אחר יש להציב במקום $x=r\cos\theta$ ובמקום $y=r\sin\theta$ ונקבל פונקציה $f(r,\theta)$. אולם הבעיה היא כיצד ישתנה $dA=dxdy$ במעבר לקואורדינטות החדשות.

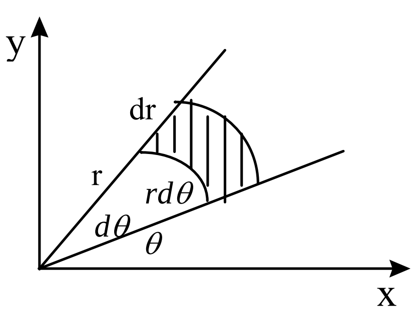
נביא נוסחה (ללא הוכחה):

$$dA = \left(\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{r}}\right)drd\theta$$

א״כ אצלנו נוכל לחשב:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{r}} = \sin\theta \qquad \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$dA = \left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right)drd\theta = rdrd\theta$$




איור 26.2

כלומר אלמנט השטח במערכת הפולרית ניתנת ע״י $rdrd\theta$.

נבדוק את המשמעות הגאומטרית, ונצדיק את התוצאה:

נתבונן באיור: $rd\theta$ זה אורך הקשת ולכן

$= rd\theta\cdot dr = dA$ **אלמנט שטח.**

נוהגים לכתוב את הביטוי הנ״ל בצורה אחרת.

הסמל $\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix}$ נקרא בשם **<u>דטרמיננטה</u>**

ומשמעותו

$$\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = ad - dc$$

לכן כותבים בעזרת סמל זה את $dA$

$$dA = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{r}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} \end{vmatrix} drd\theta$$

הגודל מסומן גם באופן הבא: $J = \dfrac{\partial(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial(\mathrm{r},\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{r}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ ונקרא בשם **JACOBIAN.**

ולכן נוכל לכתוב את המשואה הבאה:

$$\iint_R f(x,y)dxdy \to \iint_R f(\theta,r)\frac{\partial(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial(\mathrm{r},\theta)}drd\theta$$

אנטגרל לפי x ו- $y$ עובר לאנטגרל לפי $\theta$ ו- $r$ . כמובן שהגבולות גם ישתנו בהתאם.
נפתור עתה את הדוגמה שפתרנו קודם עבור מומנט התמדה של דסקית שרדיוסה $a$ .

$$I_0 = \iint_R \left(x^2 + y^2\right)dxdy =$$

**נציב:**

$$x = r\cos\theta$$

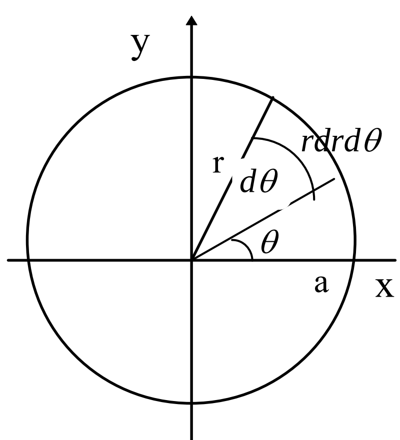
$$y = r\sin\theta$$

$$dxdy = \frac{\partial(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial(\mathrm{r},\theta)}drd\theta = rdrd\theta$$

$$I_0 = \iint_R \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)rdrd\theta$$

כדי לבצע אנטגרציה על כל העגול אזי r
משתנה מ- 0 ל-a ואילו $\theta$ מ- 0 ל- $2\pi$
(ראה איור 26.3) כלומר:

$$I_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^4}{4}d\theta = \frac{2\pi\,\mathrm{a}^4}{4} = \frac{\pi\,a^4}{2}$$



**איור 26.3**

אנו רואים איפוא הפשטות בפתרון הבעיה במערכת פולרית.
מן הראוי לציין באופן כללי יותר אם עוברים
מקואורדינטות $(x,y)$ לקואורדינטות $(u,v)$
אזי:

$$\iint_R f(x,y)dxdy \to \iint_R f(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

כאשר:

$$\underline{\mathbf{JACOBIAN}} = \frac{\partial(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial(\mathrm{u},v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{u}} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{u}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

**דוגמאות:**

1) חשב:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

אנטגרל זה לא ניתן לבצע בקואורדינטות קרטזיות x ו-$y$. אם נעבור לקואורדינטות פולריות,

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

$$dxdy=Jdrd\theta$$

נקבל:

(**יקוביאן** - J)

**כאשר:**

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{u}} & \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{u}}\\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}=\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta}-\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{r}}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

**לכן**

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta$$

**נחשב** הגבולות: האנטגרל על כל רבע המישור $(x,y)$ החיובי, כלומר $\theta$ בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$ ו בין 0 ל $\infty$.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y^2}e^{-x^2}dxdy=\int_0^\infty e^{-y^2}\left(\int_0^\infty e^{x^2}dx\right)dy$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

**מכאן תוצאה חשובה:** **(26.1)** $$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

**שים לב:** לא ניתן היה לחשב אינטגרל זה באופן ישיר אלא בעזרת האנטגרל הכפול ובעזרת קואורדינטות פולריות.

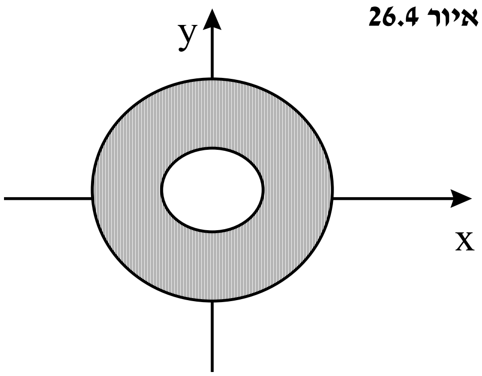
**הערה:** כאשר האינטגרל הוא על כל המישור כלומר: $\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ נקבל $\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta=\pi$.

זה נובע גם מכך שהנפח בכל המישור הוא פי 4 מהנפח ברביע הראשון.

2) חשב $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

כאשר R הוא התחום החסום בין המעגלים $x^2+y^2=4$ , $x^2+y^2=9$
במקרה זה כיון שהמשטח מעגלי כדאי לעבור לקואורדינטות פולריות,

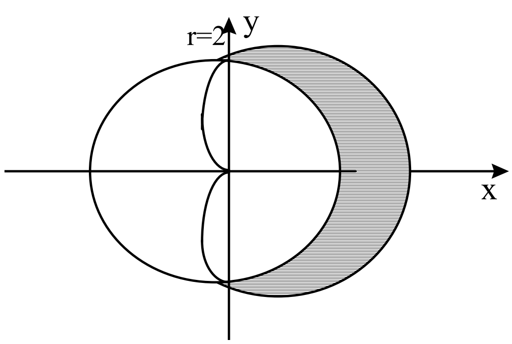
**איור 26.4**




$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$
$$\mathrm{J = r}$$
$$\mathrm{dxdy} \Rightarrow \mathrm{rdrd}\theta$$

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_2^3 r\cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left.\frac{r^3}{3}\right|_2^3 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{19}{3}d\theta = \frac{19}{3}\cdot 2\pi = \frac{38\pi}{3}$$

3) מצא את השטח מחוץ למעגל $r=2$ ובתוך הקו $r=2(1+\cos\theta)$ . השטח הדרוש הוא השטח המקווקו.



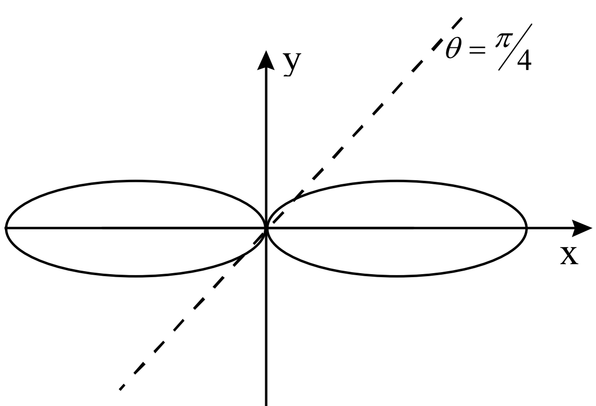

**איור 26.5**

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{r^2}{2}\right|_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 4\left(2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi+8$$

4) מצא את השטח התחום במישור $xy$ החסום ע"י הקו $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ .
אם נציב עבור $\theta$ ערכים שונים נקבל את איור הבא:




**איור 26.6**

קו זה נקרא **למיניסקטה.** בתרגיל זה נתון העקום בקואורדינטות גליליות. השטח המבוקש יהיה:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{a}^2\cos 2\theta}{2}d\theta =$$

$$= 2a^2\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

הפקטור 4 לפני האנטגרל נובע מכך שהאנטגרל

נותן את השטח ברבע הראשון ובכל 4 הרביעים יש אותו שטח.

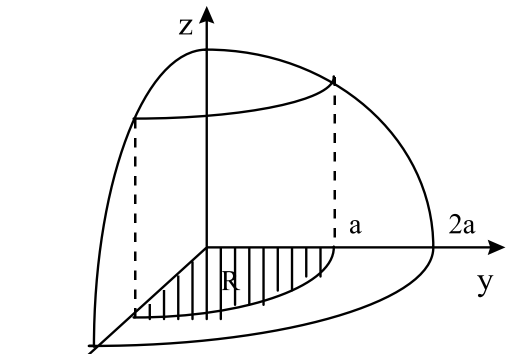
5) נפח כדור

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$2\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{a^2-r^2}\,rdrd\theta=$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\int_{a^2}^{0}U^{1/2}dUd\theta=2\cdot\frac{a^3\,2\pi}{3}=\frac{4\pi\,\mathrm{a}^3}{3}$$

זוהי הנוסחה הידוע לנפח הכור!



**איור 26.7**

6) מצא את הנפח הנחתך מהכדור $x^2+y^2+z^2=4a^2$

ע"י הגליל $x^2+y^2=a^2$

$$2\iint_R\left(4a^2-x^2-y^2\right)^{1/2}dxdy$$

כאשר R הוא שטח באיור.
אם נעבור לקואורדינטות פולריות

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

נקבל:

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(4a^2-r^2\right)^{1/2}rdrd\theta$$

הפקטור 2 נובע מכך שהאנטגרל נותן רק את הנפח העליון z>0 ועבור z<0 יש אותו נפח.
אם נציב:

$$u=4a^2-r^2$$

$$du=-2rdr\;;$$

ונחשב את הגבולות החדשים:

$$\mathrm{r}=0\Rightarrow \mathrm{u}=4\mathrm{a}^2\;\;;\;\mathrm{r}=\mathrm{a}\Rightarrow \mathrm{u}=3\mathrm{a}^2$$

ולכן האנטגרל במשתנה u יהיה:

$$2\int_o^{2\pi}\int_{4a^2}^{3a^2}u^{1/2}\,\frac{du}{(-2)}\,d\theta=-\int_0^{-2\pi}2\frac{u^{3/2}}{3}\Bigg|_{4a^2}^{3a^2}d\theta=-\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left((3a^2)^{3/2}-8a^3\right)d\theta=\frac{4}{3}\pi(8-3\sqrt{3})a^3$$

**שים לב:** שהמחובר הראשון הוא נפח כל הכדור והשני הוא החלק החלק שארד מנפח זה.
אפשר גם לבצע את האנטגרל הקודם לפי $\theta$ ואחר כך לפי r.

$$V=2\int_0^{a}\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2-r^2}\,rd\theta\,\mathrm{dr}=2\int_0^{\mathrm{a}}2\pi\sqrt{4a^2-r^2}\,rdr=\frac{4}{3}\pi(8-3\sqrt{3})a^3$$