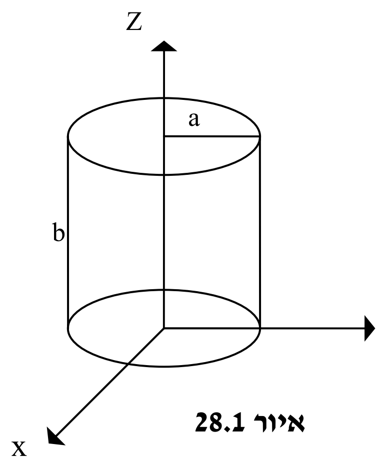
28. קואורדינטות גליליות.

כאשר יש צורך לבצע אנטגרל $\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz$ ו- R הוא נפח של גליל למשל: $x^2+y^2=a^2$ שגבהו b הרי צריך לבצע את האנטגרל הבא:

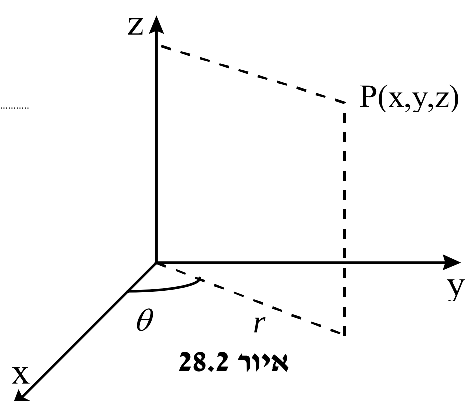
$$\int_0^b\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y,z)dxdydz$$



איור 28.1

במקרה כזה האנטגרלים הופכים למסובכים ביותר. ולכן כדאי לעבור למערכת צירים אחרת המקלה על החישובים. במקרה זה כדאי לעבור למערכת **הצירים הגלילית.**

נתבונן באיור 28.1 על נקודה P (x , y ,z). נוכל לתאר כל נקודה במרחב במקום ע"י x , y , z ע"י שלשה הערכים הבאים r, θ ו- z. r ו- θ נותנים את מקום הנקודה במישור x , y ו- z ייתן את גבהה מעל מישור z = 0 . הקשר בין הקואורדינטות x , y ,z לקואורדינטות החדשות יהיה:



איור 28.2

$$x = r\cos\theta \qquad r=(x^2+y^2)^{1/2}$$
$$y = r\sin\theta \qquad \theta = arctg\frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$

שים לב: שקואורדינטות אלו הם כמו קואורדינטות פולריות רק נוסף ציר z . קואורדינטות אלו נוחות במיוחד לשמוש במערכות גליליות. המעבר מקואורדינטות לקואורדינטות צריך להעשות בעזרת היקוביין J אלא שכאן התמונה תהיה שונה במקצת. **נגדיר** דטרמיננטה של 3×3 באופן הבא:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f\\ h & k\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f\\ g & k\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}$$

המעבר מאלמנט נפח $dxdydz$ לאלמנט נפח תלת ממדי בקואורדינטות r, θ ו-z יהיה ע"י הנוסחה:

$$dV = Jdrd\theta dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}dr\,d\theta\,dz$$

כאשר:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \sin\theta \begin{vmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

מקבלים איפוא :

$$dx\,dy\,dz \to r\,dr\,d\theta\,\mathrm{d}z$$

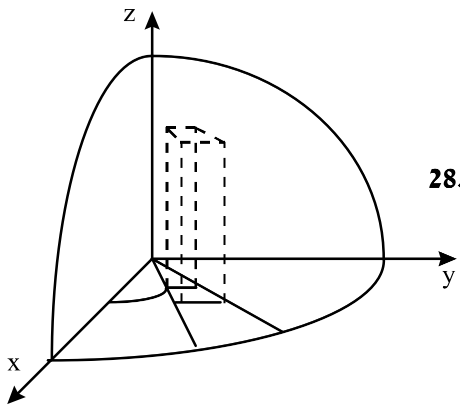
כלומר היקוביין כמו במערכת פולרית. אמנם $r\,d\theta\,\mathrm{dr}$ זה אלמנט שטח וכאשר הוא מוכפל ב- dz הוא נותן אלמנט נפח.

מכאן:

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dzdydx \Rightarrow \iiint_{(V)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dzdrd\theta$$

האנטגרציה הראשונה על z מחברת אלמנטי נפח לעמוד נפח במקום r ו- θ. האנטגרציה השניה על r מחברת העמודים לפרוסה. והאנטגרציה השלישית מחברת את הפרוסות לכל הנפח.

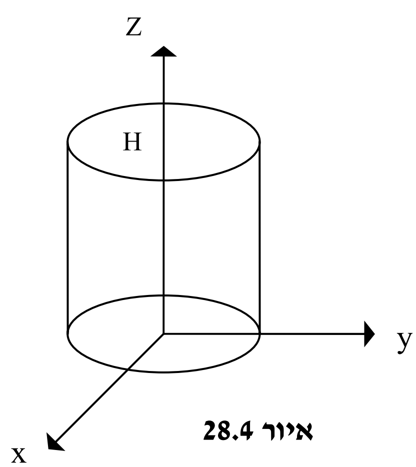


איור 28.3

דוגמאות:

1) חשב את מומנט ההתמדה של גליל ביחס לציר z :

$$I_0 = \rho\iiint_R \left(x^2+y^2\right)dxdydz$$



איור 28.4

$$I_0 = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^H (r^2)\,rdzdrd\theta =$$

$$= H\cdot\rho\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3drd\theta = \frac{\rho\,\mathrm{a}^4}{4}\cdot H\cdot 2\pi =$$

$$= \rho\pi a^2 H\frac{a^2}{2} = \frac{Ma^2}{2}$$

2) חשב את מסתו של חרוט שגבהו 4 יחידות ורדיוסו 2 כאשר ידוע שצפיפותו פרופורציונית למרחק מקודקודו. משואת החרוט היא :

$$z = 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

מרחק נקודה מהקודקוד :

צפיפות החרוט:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$$

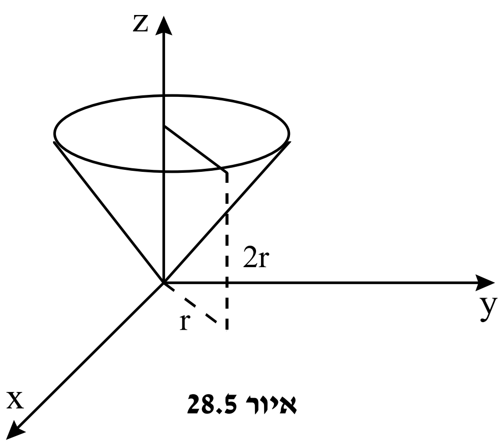
$$\rho=k\sqrt{r^2+z^2}$$

ולכן מסת הגוף תהיה:

$$M=k\iiint\sqrt{r^2+z^2}\,dV=$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{2r}^{4}\sqrt{r^2+z^2}\,rdzdrd\theta=$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_0^{\frac{z}{2}}\sqrt{r^2+z^2}\,rdrdzd\theta$$



איור 28.5

$$\int_0^{z/2}\sqrt{r^2+z^2}\,rdr=\frac{1}{2}\int_{z^2}^{\frac{5}{4}z^2}u^{1/2}du=\left.\frac{u^{3/2}}{3}\right|_z^{\frac{5}{4}z^2}=$$

נציב $u=r\ \ +z^2 \quad du=2rdr$

$$=\frac{5^{3/2}}{2^3 3}z^3-\frac{z^3}{3}$$

$$M=k\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\left(\frac{5^{3/2}}{2^3 3}-\frac{1}{3}\right)z^3dzd\theta=$$

$$=k\int_0^{2\pi}\left(\frac{5^{3/2}}{24}-\frac{1}{3}\right)\frac{4^4}{4}d\theta=\frac{128\pi k}{3}\left(\frac{5^{3/2}}{8}-1\right)$$

28.1 קואורדינטות כדוריות

המערכת הקודמת טובה במקרים בהם הבעיות מתוארות ע"י גלילים או חרוטים במרחב.

כאשר הגופים הגאומטריים הם כדורים או חלקי כדור רצוי לעבור למערכת קואורדינטות כדוריות.

נקבע את מקומה של נקודה במרחב לפי 3 גדולים הבאים: ρ, θ ו- φ.

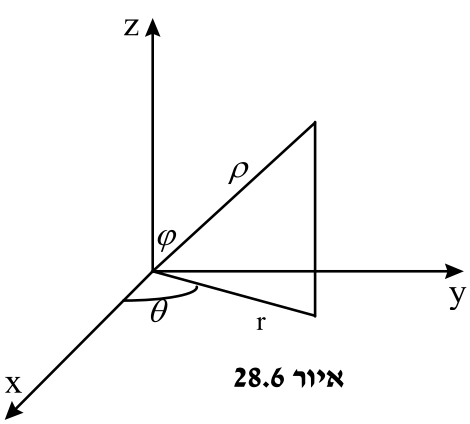
ρ-מרחק מהראשית

θ-הזווית בין הטל $\rho\,(r)$ לבין לציר x.

ו- φ-הזווית שבין ציר z ל- ρ.

נבדוק מה הקשר בין קואורדינטות אלו לבין הקואורדינטות הקרטזיות והקואורדינטות הגליליות.

נתחיל בגליליות (r,θ,z)



איור 28.6

$$r = \rho \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$\theta = \theta$$

הקשר ההפוך

$$\rho^2 = r^2 + z^2$$

$$tg\varphi = \frac{r}{z}$$

$$\varphi = arctg\frac{r}{z}$$

נעבור עתה לקרטזיות: (x, y, z)

$$x = (\rho \sin\varphi)\cos\theta$$
$$y = (\rho \sin\varphi)\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

הקשר ההפוך:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

הוכחה:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi =$$
$$= \rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2$$

$$\theta = arctg\frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

המעבר מקואורדינטות לקואורדינטות צריך לעשות בעזרת היקוביין

כלומר: $dV = dx\,dy\,dz = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}dr\,d\theta\,d\varphi$

נחשב J:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\varphi\cos\theta\begin{vmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \sin\varphi\sin\theta\begin{vmatrix} \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \cos\varphi\begin{vmatrix} \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = \sin\varphi\cos\theta(\rho^2\sin^2\varphi\cos\theta) +$$

$$+ \sin\varphi\sin\theta(\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta) + \cos\varphi(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta) =$$
$$= \rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta =$$

$$= \rho^2\sin^3\varphi + \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi = \rho^2\sin\varphi$$

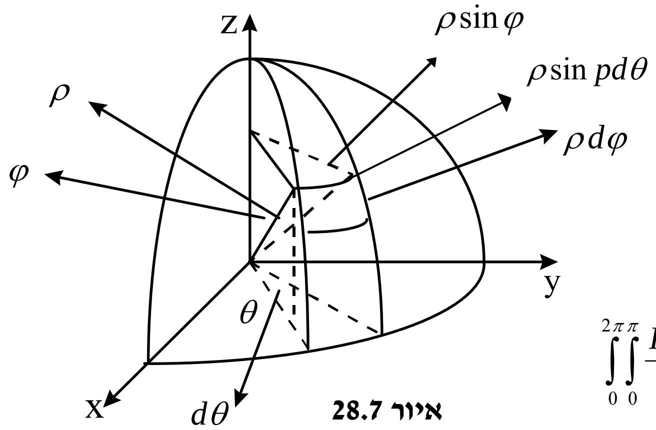
כלומר אלמנט הנפח בקואורדינטות כדוריות הינו $V = \rho^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

והמעבר הוא: $dxdydz \to \rho^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

אלמנט שטח במעטפה כדורית:

$$\Delta S = \rho\sin\varphi\,d\theta\,\rho\,d\varphi$$

אלמנט נפח: $dV = \Delta S\, d\rho = \rho^2 \sin\varphi\, d\theta d\varphi d\rho$



איור 28.7

דוגמאות:

1) מצא את הנפח של כדור שרדיוסו R.

$$\iiint\limits_{(V)} dV = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 \sin\varphi\, d\theta d\varphi d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin\varphi\, d\varphi d\theta = -\frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \Big|_0^{\pi} d\theta =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

באופן כללי אנטגרל על כדור שרדיוסו R יהיה:

$$\iiint\limits_{(V)} F(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

2) מצא את מומנט ההתמדה של כדור בעל רדיוס a ביחס לקוטר כאשר צפיפות המסה של כל נקודה בכדור פרופורציונית למרחק הנקודה ממרכז הכדור.

בקואורדינטות כדוריות משואת הכדור היא: $\rho = a$

נחלק המסה לאלמנטים dM בעלי נפח dV.

נוכל לכתוב $dM = k\rho dV$ מומנט ההתמדה יהיה:

$I = \iiint (\rho\sin\varphi)^2 k\rho dV$ כי $\rho\sin\varphi$ הוא מרחק מהקוטר

אלמנט הנפח: $dV = \rho^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$

ולכן נקבל

$$I = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin^2\varphi \rho\rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^5 \sin^3\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = \frac{ka^6}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{ka^6}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi d\theta = \frac{ka^6}{6}\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{9}\pi ka^6$$

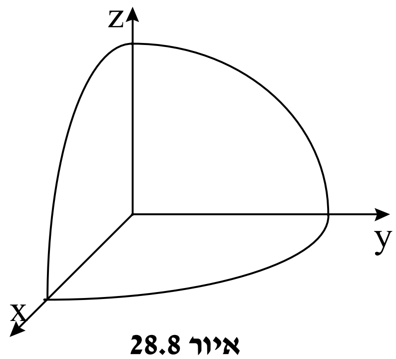
כי:

$$\int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \int_1^{-1} (1-u^2)du = \left(-u + \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1} = \frac{4}{3}$$

אם צפיפות המסה קבועה נקבל במקום $\frac{a^6}{6}$, $\frac{a^5}{5}$ כלומר

$$I = \frac{8}{15}a^5\pi\rho = \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{2}{5}a^2 = \frac{2Ma^2}{5}$$

3) מצא את קואורדינטות מרכז המסה של חצי כדור החסום בין $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $z=0$, בעל צפיפות אחידה ρ_0. בגלל סימטריה $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ נחשב את $\bar{z}$.



איור 28.8

$$I=\iiint(\rho\sin\varphi)^2 k\rho dV$$

$$\bar{z}=\frac{\rho_0\iiint\limits_{(V)} zdxdydz}{\rho_0\iiint\limits_{(V)} dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\frac{2\pi R^2}{3}}=$$

$$=\frac{3\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta}{2\pi TR^2}=\frac{\frac{3}{8}R^3 2\pi}{2\pi R^2}=\frac{3}{8}R$$

כי אם נציב $\sin\varphi=u$, $\cos\varphi d\varphi=du$ נקבל $\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi=\int_0^1 udu=\frac{1}{2}$

4) חשב $\iiint\limits_{(V)} e^{-z(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$

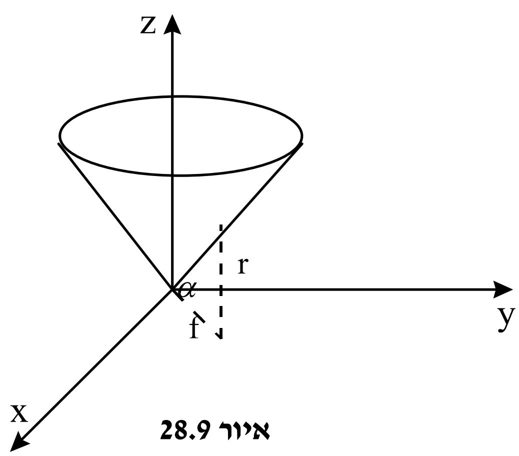
כאשר V חרוט $z^2=x^2+y^2$ וגובהו אינסופי.

בקואורדינטות כדוריות נקבל:

$z^2=r^2 \Rightarrow z=r$

ולכן הזווית $\alpha=45^0$.

נחשב האינטגרל על ρ:



איור 28.9

$$\int_0^\infty e^{-\rho^3\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-u\cos\varphi}du=$$

$$=-\frac{1}{3\cos\varphi}e^{-u\cos\varphi}\Big|_0^\infty=\frac{1}{3\cos\varphi}$$

כאשר הצבנו:

$$u=\rho^3$$
$$du=3\rho^2 d\rho$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^\infty e^{-\rho^3\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi\, d\theta=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{u}d\theta$$

כאשר הצבנו:

$$\cos\varphi = u$$
$$-\sin\varphi d\varphi = du$$
$$-\frac{2}{3}\pi\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{3}\pi\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\pi\ln 2$$

7) חשב $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy e^{y/(x+y)}$

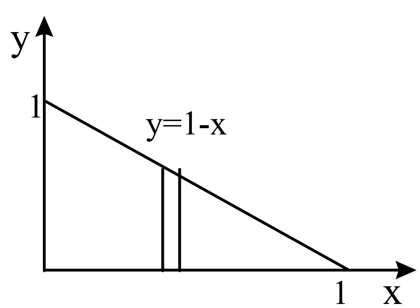
הכוונה קודם לבצע אנטרל על y כאשר x קבוע אח"כ על x. קשה לבצע אנטרל זה באופן ישיר ולכן נתבונן בו כאנטגרל על $e^{y/(x+y)}$ בתוך השטח שבאיור.
כדאי לעבור למשתנים חדשים U ו- V :

$$y = UV \qquad U = x + y$$
$$x = U - UV$$
$$V = \frac{y}{x+y}$$

היקוביין יהיה:

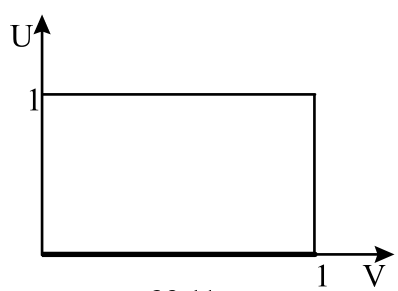
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial U} \\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-V & V \\ -U & U \end{vmatrix} =$$
$$= (1-V)U + UV = \underline{\underline{U}}$$

נבדוק הגבולות החדשים ב-U וב-V.



איור 28.10

נבדוק במישור U,V.
הקו $x = 0 \Rightarrow V = 1$
הקו $y = 0 \Rightarrow V = 0$



איור 28.11

הקו $y = 1 - x \Rightarrow U = 1$
אבל התחום צריך להיות סגור וזה נוצר ע"י הנקודה $y = 0, x = 0 \Rightarrow$ לקו $U = 0$
(ראה איור).
ולכן נקבל

$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{x/(x+y)} dydx = \int_0^1\int_0^1 e^{\frac{UV}{U}} UdUdV =$$
$$= \int_0^1 \left.\frac{U^2}{2}\right|_0^1 e^V dV = \frac{1}{2}e^V\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

8) חשב אנטגרל $\iint_R (y-x)dxdy$

כאשר R הוא תחום במישור xy החסום ע"י הקוים

$$y=-\frac{1}{3}x+5 \qquad y=x+1 \qquad y=x-3 \qquad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}$$

יהיה קשה לחשב אנטגרל כפול זה באופן ישיר אולם אם נחליף משתנים נוכל להביא מערכת צירים שתהיה מקבילה לישירים הללו.

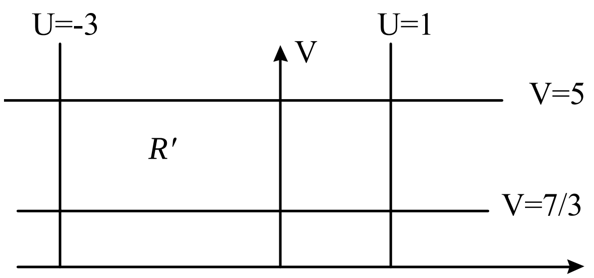
אם נבחר

$$U=y-x$$

$$V=y+\frac{1}{3}x$$

אזי הקו $y=x+1$ הופכ לקו $U=1$ ואילו הקו $y=x-3$ הופך לקו $U=-3$ במישור U,V.

אילו הקוים $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ $\quad y=-\frac{1}{3}x+5$ הופכים לקוים $V=\frac{7}{3}$ $\quad V=5$ כלומר התחום R במערכת הקרטזית יהפוך לתחום R' כבאיור.



איור 28.12

כדי לחשב את היעקוביאן נבטא

$$x=-\frac{3}{4}U+\frac{3}{4}V \qquad y=\frac{1}{4}U+\frac{3}{4}V$$

היעקוביאן יהיה

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial U}\\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3/4 & 1/4\\ 3/4 & 3/4\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4}$$

$$|J|=\frac{3}{4}$$

ולכן

$$\iint_R (y-x)dxdy=\iint_{R'}\left[\left(\frac{1}{4}U+\frac{3}{4}V\right)-\left(-\frac{3}{4}U+\frac{3}{4}V\right)\right]\left(\frac{3}{4}\right)dUdV=$$

$$=\frac{3}{4}\iint_{R'}UdUdV=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5}\int_{-3}^{1}UdUdV=\frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}\frac{U^2}{2}\Big|_{-3}^{1}dV=(-4)\frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}dV=(-4)\frac{3}{4}\left(5-\frac{7}{3}\right)=-8$$

5) חשב את מסתו של כדור שרדיוסו R אם צפיפות המסה פרופורציונלית ל- $\frac{x^2e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

המסה היא:
$$M=\iiint\limits_{(V)}\frac{x^2e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx\,dy\,dz=$$

נציב:
$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho^2}{\rho^3}\sin^2\varphi\cos^2\theta e^{-\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho\sin^3\varphi\cos^2\theta e^{-\rho^2}d\rho\,d\varphi\,d\theta=-\frac{1}{2}(e^{-R^2}-1)\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi)\cos^2\theta\,d\theta=$$

נציב:
$$U=\cos\varphi$$
$$dU=-\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\left(\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right)\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^{-1}(1-U^2)dU\left(\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right)_0^{2\pi}=-\frac{1}{2}\left(U-\frac{U^3}{3}\right)_1^{-1}\cdot2\pi=\frac{4}{3}\pi$$

6) חשב את הנפח החסום בין הגלילים
$x^2+y^2=4$ $\quad$ $x^2+y^2=9$ ובתוך הכדור
$x^2+y^2+z^2=16$
בקואורדינטות גליליות הנפח היה
נציב:

$$16-r^2=U$$
$$-2rdr=dU$$
$$U=12\Leftarrow r=2$$
$$U=7\Leftarrow r=3$$

$$\int_2^3\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}}rdzd\theta dr=2\int_2^3\int_0^{2\pi}r\sqrt{16-r^2}d\theta dr=2\cdot2\pi\int_2^3r\sqrt{16-r^2}dr=$$

$$=\frac{4\pi}{2}\int_7^{12}U^{1/2}dU=2\pi\frac{2}{3}U^{3/2}\Big|_7^{12}=\frac{4\pi}{3}(12^{3/2}-7^{3/2})$$

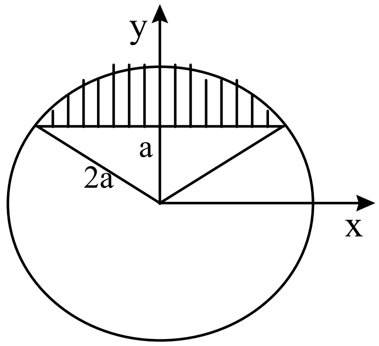
9) חשב $\iint\limits_R e^{-\frac{7x}{8}}dxdy$

כאשר R הוא תחום במישור x y החסום ע"י הקוים:

$$y=2x-1 \qquad y=2x+4 \qquad y=\frac{1}{4}x-2 \qquad y=\frac{1}{4}x+3$$
$$4y-x-12=0 \qquad 4y-x+8=0$$

רמז: העזר בטרנספורמציה
$$U = y - 2x$$
$$V = y - \frac{1}{4}x$$

10) מצא את המסה של חלק הכדור (החלק הקטן) בין המישור $z = a$
לכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.
כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י:
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.



איור 28.13

נכתוב את משואת המישור $z = a$
בקואורדינטות כדוריות באמצעות a ו- φ.

$$z = a$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

ומכאן משואת המישור:

$$a/\rho = \cos\varphi$$
$$\rho = a\sec\varphi$$

נחשב הזוית ע"י:

$$2a = a\sec\varphi$$
$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

ולכן המסה תהיה:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{a\sec\varphi}^{2a}\frac{\rho^2}{\rho}\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$