35. משוואות לא ליניאריות
35.1 משוואות ברנולי

משוואות דיפרנציאליות לא לינאריות ניתנת לעתים להפכה למשוואות לינאריות ע״י טרנספורמציה מתאימה.

לדוגמה משוואות מהצורה

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k \qquad (35.1)$$

כאשר k הוא כל מספר ממשי.

משואה זו נקראת בשם **משואת ברנולי** (מתמטיקאי שחי בשנים 1654-1705) שהוא פתח אותה לראשונה.

נראה את הדרך הפתרון.

נכפיל את המשואה ב- y^{-k} ונקבל

$$y^{-k}y' + P(x)y^{-k+1} = Q(x)$$

לעתים קוראים למשואה זו משואת ברנולי.

נציב

$$y^{-k+1} = v$$

$$(1-k)y^{-k}y' = v'$$

$$\frac{v'}{1-k} + P(x)v = Q(x)$$

כלומר קיבלנו מיד משואה לינארית ב- x שאותה אנו יודעים לפתור.

דוגמה:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \left(x^2 + y\right)y^{-2}$$

$$y^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^3 = x^2 + 4$$

$$y^3 = v$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x^2 + 4 \quad /\cdot 3$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = 3(x^2 + 4)$$

זוהי המשואה לינארית מהצורה

$$\frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

נחשב את

$$I = \int P dx = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln x$$

הפתרון

$$v = e^{-I}\int Qe^{I}dx + ce^{-I}$$

$$e^{I} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$v = \frac{1}{x^3}\int 3(x^2+4)x^3dx + cx^{-3} = \frac{3}{x^3}\left(\frac{x^6}{6}+x^4\right)+cx^{-3}$$

$$v = y^3$$

$$y^3 = \frac{x^3}{2}+3x+cx^{-3}$$

ישנם עוד משוואות שאפשר להביאם לצורה של משוואה לינארית ע"י הצבה המתאימה.
נושא זה די קשה ודרוש מיומנות רבה.

דוגמאות:

$$\sin y\, y' + \sin x \cos y = \sin x$$

נשים לב כי הנגזרת של $\cos y$ היא $-\sin y\, y'$ ולכן נקח $\cos y = u$

$$\frac{du}{dx} - \sin x u = -\sin x$$

וזו משוואה לינארית הניתנת לפתרון

$$I = \int Pdx = \int -\sin x dx = \cos x$$

$$u = e^{-I}\int Qe^{I}dx + ce^{-I}$$

$$e^{I} = e^{\cos x}$$

$$u = e^{-\cos x}\int (-\sin x)e^{\cos x}dx + ce^{\cos x}$$

$$z = \cos x \quad dz = -\sin x dx$$

$$u = e^{-\cos x}\int e^{z}dz + ce^{\cos x} = e^{\cos x}e^{-\cos x} + ce^{\cos x} = 1 + ce^{\cos x}$$

$$u = \cos y$$

$$y = \arccos u = \arccos(1+ce^{-\cos x})$$

35.2 משוואות קלרו Clairaut.

משוואת קלרו היא סוג של משוואה מסדר ראשון אך ממעלה גבוהה יותר מאחד.
צורת המשוואה היא:

$$y = xy' + f(y') \quad (35.2)$$

כאשר $f(y')$ היא פונקציה כלשהי של y'.

בשנת 1734 קלרו ציין שהפתרון של משוואה זו הוא פשוט $y' = c$.

ואמנם אם נניח פתרון כזה ונציב נקבל

$$y = cx + f(c)$$

ואמנם

$$\frac{dy}{dx} = c$$

דוגמה:

$$xy'^2 - yy' + 3 = 0$$

נוכל לכתוב

$$y = xy' + \frac{3}{y'}$$

שזו משוואת קלרו

נציב $y' = C$ ונקבל

$$y = Cx + \frac{3}{C}$$

כאשר C קבוע כלשהו.

דוגמאות כלליות:

א. מצא הפתרון הפרטי של $(1+x^3)dy - x^2 ydx = 0$ המקיים תנאי התחלה $x = 1 \quad y = 2$.

$$\frac{dy}{y} - \frac{x^2 dx}{1+x^3} = 0$$

$$\ln y - \frac{1}{3}\ln(1+x^3) = c$$

$$y^3 = k(1+x^3)$$

$$2^3 = k(2) = 2k$$

$$k = 4$$

ולכן הפתרון

$$y^3 = 4(1+x^3)$$

ב. פתור

$$(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$$

משוואה זו נחלק ב- x^3 ונקבל הומוגנית

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3xy^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

נציב

$$y=xz \quad z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1+z^3}{3z^2}$$

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{3}z$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3z^2}-\frac{2}{3}z$$

$$\frac{dz}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^2}-2z\right)}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{z^2dz}{\frac{1}{3}\left(1-2z^3\right)}=\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2z^3)=\ln x+C$$

$$(1-2z^3)^{-1/2}=xk$$

$$x\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)^{1/2}=k$$

$$x^2\left(\frac{x^3-2y^3}{x^3}\right)=k^2=k'$$

הפתרון:

$$x^3-2y^3=k'x$$

ג.

$$y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$$

זו משואה לינארית ב- x כאשר y משתנה ב״ת.

הפתרון:

$$I = \int Pdy = \int \frac{1}{y \ln y} dy = \ln \ln y$$

$$e^{I} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$$

$$e^{-I} = \frac{1}{\ln y}$$

הפתרון הכללי

$$x = e^{-I} \int Qe^{I} dy + Ce^{-I} = \frac{1}{\ln y} \int \frac{1}{y} \ln y dy + C \frac{1}{\ln y} =$$

$$= \frac{1}{\ln y} \frac{(\ln y)^2}{2} + \frac{C}{\ln y} = \frac{\ln y}{2} + \frac{C}{\ln y} = x$$

$$\ln^2 y + C = 2x \ln y$$