38. משוואות מסדר שני.

נתחיל בסוג הפשוט: **משוואות לינאריות.**

משוואה מהצורה:

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)} \quad (38.1)$$

נקראת משוואה ליניארית מסדר שני.

משוואה מצורה זו מופיעה לעתים קרובות ביותר בפיזיקה.

ישנו משפט חשוב על משוואות לינאריות שנביאו ללא הוכחה:

אם y_{1H} הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית $\left(R(x)=0\right)$ וכן y_{2H} הוא פתרון אחר של ההומוגנית

אזי הפתרון **הכללי** של המשוואה ההומוגנית יהיה (38.2)

$$Ay_{1H} + By_{2H}$$

פתרון זה כולל את כל הפתרונות האפשריים, כאשר A ו- B קבועים כלשהם.

ואם y_I הוא פתרון פרטי כלשהו של המשוואה האי הומוגנית אזי

$$\boxed{Ay_{1H} + By_{2H} + y_I} \quad (38.3)$$

יהיה הפתרון הכללי של המשוואה האי הומוגנית.

ניתן להוכיח משפט זה ע"י המשפט הקודם שלמדנו, שלמשוואה מסדר n הפתרון הכללי כולל n - קבועים שרירותיים. אם y_{1H} פתרון ההומוגנית הרי גם Ay_{1H} פתרון הומוגנית (ע"י הצבה במשוואה).

כ"כ לגבי By_{2H} וגם הסכום $Ay_{1H} + By_{2H}$ פתרון. היות וקיבלנו פתרון עם שני קבועים שרירותיים הוא <u>חייב</u> להיות הפתרון הכללי. אם y_I פתרון האי הומוגנית הרי גם כל פתרון של ההומוגנית פלוס y_I הוא פתרון של האי הומוגנית, שכן פתרון ההומוגנית נותן אפס כאשר מציבים אותו באגף שמאל של המשוואה (38.1).

נתחיל לטפל במקרים פשוטים ביותר $\quad y'' + ay' + by = 0$

זו משוואה הומוגנית כאשר המקדמים b,a קבועים.

נראה לדוגמה: $\quad y'' + 5y' - 6y = 0$

במקרים אלה תמיד ננחש פתרון מהצורה

$$y = e^{\mu x}$$
$$y' = \mu e^{\mu x}$$
$$y'' = \mu^2 e^{\mu x}$$

כלומר נקבל:

$$\mu^2 e^{\mu x} + 5\mu e^{\mu x} - 6e^{\mu x} = 0 \quad / \times e^{-\mu x}$$

$$\mu^2 + 5\mu - 6 = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu + 6) = 0$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\mu_2 = -6$$

כלומר e^x ו- e^{-6x} פתרונות.

ואמנם אם נציב במשואה

$$y'' + 5y' - 6y = e^x + 5e^x - 6e^x = 0$$

נקבל e^x פתרון

כ״כ נציב e^{-6x}

$$y'' + 5y' - 6y = 36e^{-6x} - 30e^{-6x} - 6e^{-6x} = 0$$

גם הוא פתרון.

לפי המשפט הנ״ל הפתרון הכללי יהיה

$$y = Ae^x + Be^{-6x}$$

ואמנם נציב ונראה שהוא פתרון

$$y'' + 5y' - 6y = (Ae^x + 36Be^{-6x}) + 5(Ae^x - 6Be^{-6x}) - 6(Ae^x + Be^{-6x}) = 0$$

נראה עתה את הפתרון הכללי למשואה

$$y'' + ay' + by = 0$$

נציב

$$y = e^{\mu x}$$

$$\mu^2 + a\mu + b = 0$$

$$\mu_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

כאשר הפתרון הכללי

$$y = Ae^{\mu_+ x} + Be^{\mu_- x}$$

אם $\mu_\pm$ ממשיים משאירים כך את הפתרון כמו בדוגמה האחרונה.

נבדוק עתה את המקרה כלומר $\mu_\pm$ אינם ממשיים.

במקרה זה נוכל לכתוב

$$\mu_\pm = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

כאשר $4b-a^2$ ממשי חיובי.

ואז נקבל את הפתרון הכללי

$$y = Ae^{-\frac{a}{2}x+i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}x} + Be^{-\frac{ax}{2}-i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}x}$$

נסמן $\rho=\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\left[Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x}\right]$$

הוכחנו

$$e^{iu} = \cos u + i\sin u$$

לכן

$$e^{-iu} = \cos u - i\sin u$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left[A(\cos\rho x + i\sin\rho x) + B(\cos\rho x - i\sin\rho x)\right] =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left[(A+B)\cos\rho x + i(A-B)\sin\rho x\right] = e^{-\frac{a}{2}x}\left(C\cos\rho x + iD\sin\rho x\right)$$

מקרה שני $a^2-4b=0$

במקרה זה יש רק פתרון אחד $y=Ae^{-\frac{a}{2}x}$ למשואה ההומוגנית וא"כ איך נקבל את הפתרון הכללי, שהוא צריך להיות קומבינציה ליניארית של 2 פתרונות.
במקרה זה נוכל להוכיח שפתרון נוסף יהיה

$$y = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

ואמנם

$$y' = xe^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a}{2}\right) + e^{-\frac{a}{2}} = e^{-\frac{a}{2}x}\left(1-\frac{a}{2}x\right)$$

$$y'' = \left(-\frac{a}{2}\right)e^{-\frac{a}{2}x}\left(1-\frac{a}{2}x\right) + e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a}{2}\right) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(-a+\frac{a^2}{4}x\right)$$

$$y''+ay'+by = e^{-\frac{a}{2}x}\left(-a+\frac{a^2}{4}x\right) + ae^{-\frac{a}{2}x}\left(1-\frac{a}{2}x\right) + bxe^{-\frac{a}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(-a+\frac{a^2}{4}x+a-\frac{a^2}{2}x+bx\right) = 0$$

אבל $b=\frac{a^2}{4}$

ולכן נקבל $y'' + ay' + by = 0$

ומכאן שהפתרון הכללי יהיה: $y = Ae^{-\frac{a}{2}x} + Bxe^{-\frac{a}{2}x}$

דוגמאות:

1. פתור $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

נציב $y = e^{mx}$ ונקבל

$$m^2 + m - 6 = 0$$

והשרשים

$$m_2 = -3 \quad m_1 = 1$$

ולכן הפתרון הכללי

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

2. פתור את המשוואה $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} = 0$

היא משואה לינארית הומוגנית מסדר 3 ונפתר באותה דרך כלומר

$$y = e^{mx}$$
$$m^3 - m^2 - 12m = 0$$
$$m(m^2 - m - 12) = 0$$
$$m_1 = 0 \quad m_2 = -3 \quad m_3 = 4$$

ולכן הפתרון הכללי $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$

3. פתור את המשוואה

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$(m-1)^2 = 0$$
$$m_{1,2} = 1$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

.4

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$m^2+m+1=0$$
$$m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$y=Ae^{-\frac{x}{2}+i\frac{\sqrt{3}X}{2}}+Be^{-\frac{x}{2}-i\frac{\sqrt{3}x}{2}}=e^{-\frac{X}{2}}\left(Ae^{i\frac{\sqrt{3}x}{2}}+Be^{-i\frac{\sqrt{3}x}{2}}\right)=$$
$$e^{-\frac{x}{2}}\left(A\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+i\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+B\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-i\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)=$$
$$=e^{-\frac{x}{2}}\left((A+B)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+i(A-B)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)=e^{-\frac{x}{2}}\left(A'\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+iB'\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

.5

פתור $y^{(4)}-8y''+16y=0$

נציב

$$y=e^{mx}$$
$$m^4-8m^2+16=0$$
$$(m^2-4)^2=0$$
$$m_{1,2}=2\quad m_{3,4}=-2$$

במקרה זה הפתרון הכללי יהיה

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4xe^{-2x}$$

.6

הערה: אם שורש אחד מופיע במשוואה 3 פעמים למשל:

$$\frac{d^3y}{dx^3}-9\frac{d^2y}{dx^2}+27\frac{dy}{dx}-27y=0$$
$$(m-3)^3=0$$

אזי הפתרון הכללי יהיה:

$$y=Ae^{3x}+Bxe^{3x}+Cx^2e^{3x}$$

דוגמה פיסיקלית:

נראה עתה דוגמה פיסיקלית למשואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים:

מסה m מתנודדת בקצה קפיץ אנכי. מצא את מקומו של המסה כפונקציה של הזמן.

נציין ב- y את ההעתק של המסה מנקודה שיווי משקל. נזכור שהכח המחזיר על מסה m הוא -ky כאשר k קבוע הקפיץ. והסימן (-) מציין שהכח וההעתק הם בכיוונים הפוכים.
אזי מהחק השני של ניוטון נקבל

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky} \qquad (38.4)$$

או נסמן

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

זו משואה ליניארית הומוגנית.

נסמן $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ואז נקבל

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

נניח פתרון

$$y = e^{\mu x}$$
$$\mu^2 + \omega^2 = 0$$
$$\mu = \pm i\omega$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$\boxed{y = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t} \qquad (38.5)$$

כאשר A_1 ו- B_1 קבועים שרירותיים.

נציב $A_1 = C\cos\gamma \quad B_1 = C\sin\gamma$ ונקבל:

$$= C\sin(\omega t + \gamma)$$

כלומר זו משואת התנועה של הגוף.

גוף המקיים משואת תנועה כזו, או מקיים את משואה (1) הוא נע בתנועה הרמונית.

זהו הפתרון הכללי של הבעיה.

נניח עתה תנאי התחלה מסוימים ע״מ למצוא פתרון מיוחד.

נניח שהמסה הוחזקה 10 cm מתחת לשיווי משקל ואז בפתאומיות נעזבה.

כלומר ב- $t = 0$ $\quad y = -10$ ($y = 0$ במצב שיווי משקל).

כמו כן $0 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} =$ מהירות הגוף.

$$y = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t$$

ואז נקבל מתוך

$$\frac{dy}{dt} = A_1\omega\cos\omega t - B_1\omega\sin\omega t$$

$$-10 = A_1 \cdot 0 + B_1 \cdot 1$$
$$0 = A_1\omega \cdot 1 - B_1\omega \cdot 0$$
$$A_1 = 0$$
$$B_1 = -10$$

ומכאן שהפתרון המסויים של הבעיה הנ״ל יהיה

$$y = -10\cos\omega t$$

הבעיה שפתרנו זה עתה אינה ריאלית מבחינה מעשית. המשואה האחרונה אומרת שהמסה, אם החלה פעם לנוע תתמיד בתנודותיה מעלה ומטה **לעולם!**

זהו בודאי שאינו נכון. מה שקורה הוא שהתנודות יחלו לדעוך עד שהמערכת תעצר.

הסבה לאי ההתאמה בין המציאות הפיסיקלית לבין התשובה המתמטית הוא בזאת שהזנחנו כח **חכוך.**

הנחה מתקבלת על הדעת עבור בעיה זו ועבור בעיות רבות דומות בפיסיקה שישנו כח מחזיר שהוא פרופורציונלי למהירות הגוף.

נסמן כח זה ב- $-l\dfrac{dy}{dt}$ בכוון מנוגד למהירות. ואז חק ניוטון השני יהיה:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - l\frac{dy}{dt}\ (l > 0)\ /\ m$$

ונקבל

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{l}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

נסמן

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad 2b = \frac{l}{m}\ (b > 0)$$

ונקבל משואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

נפתור אותה:

$$\mu^2 + 2b\mu + \omega^2 = 0$$
$$\mu_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

יש עתה 3 סוגי תשובות לבעיה התלויים ביחס של b^2 ל ω^2. ונותנים להם השמות הבאים:

$b^2 > \omega^2$ - מרוסנת - *over damped*

$b^2 = \omega^2$ - קריטית - *critically damped*

$b^2 < \omega^2$ - תת מרוסנת - *under damped*.

נדון בכל מקרה בנפרד:

<u>תנועה מרוסנת</u>

היות $b^2 > \omega^2$ אזי $\sqrt{b^2-\omega^2}$ ממשי וקטן מ- b אזי שני השרשים של μ שליליים

$$y = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$$

כאשר

$$\lambda_1 = -\mu_1 = b + \sqrt{b^2-\omega^2}$$

$$\lambda_2 = -\mu_2 = b - \sqrt{b^2-\omega^2}$$

וכפי שרואים y הולך וקטן עם הזמן ואין כלל תנוע מחזורית. (כח החכוך המחזיר מבטל את השפעת הכוח ההרמוני.)

<u>תנועה קריטית:</u>

כאשר $b=\omega$ יש לנו שתי פתרונות שוים $\mu_1 = \mu_2 = -b$

ואז הפתרון הכללי

$$y = Ae^{-bt} + Bte^{-bt} = (A+Bt)e^{-bt}$$

בשני המקרים הנ"ל המסה m נתונה לכח החכוך מחזיר גדול כך שהוא חוזרת למנוחה ולא לתנועה הרמונית חוזרת.

<u>תנועה תת מרוסנת</u>

כאשר $b^2 < \omega^2$ אזי $\sqrt{b^2-\omega^2}$ הוא מדומה נסמן $\beta = \sqrt{\omega^2-b^2}$ ממשי אזי

$\sqrt{b^2-\omega^2} = i\beta$ ואז השרשים הם $-b \pm i\beta$ כלומר הפתרון יהיה:

$$y = C_1 e^{(-b+i\beta)t} + C_2 e^{(-b-i\beta)t} = e^{-bt}\left(A_1 \sin\beta t + A_2 \cos\beta t\right) = Ce^{-bt}\sin(\beta t + \gamma)$$

תוצאה זו היא בהתאם למה שאנו יודעים שבדרך כלל קורה למסה m. בגלל המקדם e^{-bt} האוסצילציות קטנות באמפליטודה עם הזמן.

כ"כ נשים לב שהתדירות $\beta = \sqrt{\omega^2-b^2}$ היא פחות מהתדירות של האוסצילטור החפשי.

למרות שנתנו דוגמה פיסיקלית, המתמטיקת בה דנו הוא שמושית למספר רב של בעיות בפיסיקה.

קודם כל יש הרבה צורות של ויברציות מכניות מחוץ למסה הקשורה בקפיץ, כמו מטוטלת קולון, מחט של מכשיר מדידה והרבה דוגמאות נוספות מסובכות יותר כמו תנודות מבנים כמו גשרים, מטוסים ותנודות האטום הגביש.

במקרים אלה אנו זקוקים לפתירת מ״ד דומות למה שעסקנו.

למדנו עד כה למצא את הפתרון הכללי של המשואה ההומוגנית.

אם נמצא עתה פתרון מיוחד למשואה הלא הומוגנית נוכל להוסיפו לפתרון הכללי של ההומוגנית ולקבל את הפתרון הכללי של האי - הומוגניות.

38.1 משואה ליניארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים.

נטפל עתה במשואות לינאריות עם מקדמים קבועים אך לא הומוגנית.

כלומר מהצורה

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x)$$

כתבו משוואה זו בצורה

$$\left(D^2+aD+b\right)y=f(x)$$

הזכרנו משפט שהפתרון הכללי של המשואה הזו יהיה הפתרון הכללי של ההומוגנית+

פתרון מיוחד של הלא הומוגנית $y=y_H+y_I$

נלמד מספר שיטות לפתירת משואות מהסוג הנ״ל.

שיטה ראשונה: **שיטת אנטגרציה.**

שיטה זו היא פשוטה ויכולה תמיד לשמש ע״מ לפתור משואות מהסוג הנ״ל. אולם, ברוב המקרים היא ארוכה יותר ודורשת עבודה יותר משיטות אחרות.

נתבונן על השיטה באמצעות הדוגמה הבאה: $y''+y'-2y=e^x$

נוכל לכתוב $\left(D^2+D-2\right)y=e^x$

או $(D-1)(D+2)y=e^x$

נסמן לנו

$$u=(D+2)y$$

ואז נקבל משואה דיפרנציאלית עבור y מסדר ראשון ולינארית $(D-1)u=e^x$

או

$$\frac{du}{dx}-u=e^{x}$$

כלומר הפתרון יהיה

$$u=e^{-I}\int Qe^{I}dx+Ce^{-I}$$

כאשר

$$I=\int Pdx$$
$$Q=e^{x}$$
$$P=-1$$

א״כ

$$I=\int(-1)dx=-x$$
$$u=e^{x}\int e^{x}e^{-x}dx+C_1e^{x}=e^{x}x+C_1e^{x}$$

עתה נציב את הפתרון עבור u ונקבל

$$e^{x}x+C_1e^{x}=\left(D+2\right)y$$

קבלנו משואה ליניארית מסדר ראשון עבור y

$$\frac{dy}{dx}+2y=e^{x}x+C_1e^{x}$$
$$P=2$$
$$Q=e^{x}x+C_1e^{x}$$
$$I=\int Pdx=2x$$
$$y=e^{-I}\int Qe^{I}dx+C_2e^{-I}=e^{-2x}\int\left(e^{x}x+C_1e^{x}\right)e^{2x}dx+C_2e^{-2x}=$$
$$=e^{-2x}\int\left(e^{3x}x+C_1e^{3x}\right)dx+C_2e^{-2x}=e^{-2x}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}C_1e^{3x}\right)+C_2e^{-2x}=$$
$$=\frac{1}{3}xe^{x}+C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$$

זהו הפתרון הכללי וקבלנו כאן מעשה את הפתרון של ההומוגנית (2 המחוברים האחרונים) + פתרון פרטי של האי הומוגנית המחובר הראשון.
השיטה הנ״ל הופכת לעתים למסובכת ולכן בד״כ משתמשים בשיטות אחרות.

38.2 שיטת השוואת מקדמים.

בשיטת זו מוצאים תחילה את הפתרון הכללי של ההומוגנית ואח״כ פתרון מיוחד של האי הומוגנית בשיטה הבאה.

מנחשים פתרונות הכוללים קומבינציה של הפונקציות והנגזרות שלהם המופיעות באגף ימין של משואה האי הומוגנית.

לדוגמה אם המשואה היא מהצורה

$$\left(D^2+aD+b\right)y=x^3$$

נבחר כפתרון מיוחד

$$y_I=ax^3+bx^2+cx+d$$

נציב ואח״כ נזהה את המקדמים

או אם באגף ימין מופיע e^x+e^{3x}

אזי $y_I=Ae^x+Be^{3x}$.

אם באגף ימין מופיע $\sin ax$

אזי $y=A\cos ax+B\sin ax$ ולהפך.

השיטה אינה יעילה כאשר מספר הנגזרות השונות של הפונקציה באגף ימין הוא אינסופי כמו למשל tgx.

דוגמאות:

$$y''+y'-2y=x^2-x$$

פתרון ההומוגנית

$$m^2+m-2=0$$
$$(m-1)(m+2)=0$$
$$y_H=Ae^x+Be^{-2x}$$

ננחש פתרון האי הומוגנית

$$y_I=Ax^2+Bx+C$$
$$y_I'=2Ax+B$$
$$y_I''=2A$$

ונציב

$$2A+(2Ax+B)-2Ax^2-2Bx-2C=x^2-x$$

$$-2A=1 \qquad A=-\frac{1}{2}$$
$$2A-2B=-1 \qquad B=0$$
$$2A+B-2C=0 \quad C=-\frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון המיוחד יהיה

$$y_I = -\frac{1}{2}(x^2+1)$$

והפתרון הכללי

$$y = Ae^{x} + Be^{-2x} - \frac{1}{2}(x^2+1)$$

דוגמאות:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + \sin x$$

ע״מ למצוא פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$
$$m_1 = 2$$
$$m_2 = 1$$

ולכן פתרון ההומוגנית

$$y = Ae^{2x} + Be^{x}$$

אצלנו

$$Q = x^2 + \sin x$$

נשים לב שכל הנגזרות של Q הם $\sin x, x$ ו- $\cos x$ ולכן נניח פתרון מהצורה

$$y = ax^2 + bx + c + d\sin x + e\cos x$$

נציב במשוואה:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b + d\cos x - e\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a - d\sin x - e\cos x$$

$$2a - d\sin x - e\cos x - 3(2ax + b + d\cos x - e\sin x) +$$
$$+ 2(ax^2 + bx + c + d\sin x + e\cos x) = x^2 + \sin x$$

אנו מעוניינים שהביטוי באגף שמאל יתן את אגף ימין ולכן ע״י השואת מקדמים

נדרוש:

$$2a = 1 \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$-6a+2b=0 \qquad b=3a=\frac{3}{2}$$

$$2a-3b+2c=0 \quad 2c=3b-2a=\frac{9}{2}-\frac{2}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow c=\frac{7}{4}$$

$$-d+3e=1 \qquad d=3e-1$$

$$-e-3d=0$$

$$-e-3(3e-1)=-e-9e+3=0$$

$$-10e=-3$$

$$e=\frac{3}{10}$$

$$d=3\cdot\frac{3}{10}-1=\frac{9}{10}-1=-\frac{1}{10}$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$y=Ae^{2x}+Be^{x}+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}-\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x$$

הערה: השיטה של פתרון נסיוני נופלת כאשר ב- Q יש בטוי שהוא פתרון של המשואה ההומוגנית שכן אגף שמאל יתן עבורו אפס, לכן הוא לא יתרום לאגף ימין.

לדוגמה:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{2x}$$

$$m^{2}-3m+2=0$$

$$m_1=2$$

$$m_2=1$$

במקרה זה אם נבחר כפתרון כללי

$$y=Ae^{x}+Be^{2x}$$

נקבל סתירה שכן באגף שמאל נקבל אפס ובאגף ימין שונה מאפס.

לכן עלינו לקחת כאן כפתרון נסיוני מיוחד $u=cxe^{2x}$

$$\frac{du}{dx}=ce^{2x}+2cxe^{2x}$$

ואת c לקבוע ע"י השואת מקדמים

$$\frac{d^{2}u}{dx^{2}}=2ce^{2x}+2ce^{2x}+4cxe^{2x}$$

$$4ce^{2x}+4cxe^{2x}-3ce^{2x}-6cxe^{2x}+2cxe^{2x}=e^{2x}$$

$$c=1$$

מכאן שהפתרון הכללי יהיה

$$y=Ae^{x}+Be^{2x}+xe^{2x}$$

נחזור עתה לבעיה הפיסיקלית שטפלנו בפרק 38, שם טפלנו בבעיה של אוסצילטור הרמוני ללא כח חיצוני. קבלנו תנועה מרוסנת של אוסצילטור.

נדון עתה בתנודות הנ"ל כאשר ישנו כח מחזורי חיצוני הפועל על המערכת.

עלינו לפתור משואה דיפרנציאלית לא הומוגנית, באגף ימין פונקציה של t.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+\omega^2 y=F\sin\omega t$$

הפתרון יכלול פתרון של ההומוגנית, השואף לאפס כאשר t שואף ל- ∞.

אולם הפתרון יכלול גם פתרון מיוחד. שאינו שואף לאפס בגלל הכוח המחזורי.

נניח פתרון מהצורה

$$y_I = A\sin\omega' t + B\cos\omega' t$$

ונקבל

$$-A\omega'^2\sin\omega' t - B\omega'^2\cos\omega' t + 2bA\omega'\cos\omega' t - 2bB\omega'\sin\omega' t +$$
$$+\omega^2 A\sin\omega' t + \omega^2 B\cos\omega' t = F\sin\omega' t$$

$$-A\omega'^2 - 2b\omega' B + \omega^2 A = F$$
$$-B\omega'^2 + 2bA\omega' + \omega^2 B = 0$$

$$B(\omega^2-\omega'^2) = -2bA\omega'$$

$$B = -\frac{2bA\omega'}{\omega^2-\omega'^2}$$

$$-A\omega'^2 + 2b\omega'\frac{2bA\omega'}{\omega^2-\omega'^2} + \omega^2 A = F$$

$$A\left(-\omega'^2 + \frac{4b^2\omega'^2}{\omega^2-\omega'^2} + \omega^2\right) = F$$

$$A\frac{-\omega'^2\omega^2 + \omega'^4 + 4b^2\omega'^2 + \omega^4 - \omega'^2\omega^2}{\omega^2-\omega'^2} = F$$

$$A\frac{\left(\omega^2-\omega'^2\right)^2 + 4b^2\omega'^2}{\omega^2-\omega'^2} = F$$

$$A = \frac{F\left(\omega^2-\omega'^2\right)}{\left(\omega^2-\omega'^2\right)^2 + 4b^2\omega'^2}$$

$$B = \frac{-2b\omega' F}{\left(\omega^2-\omega'^2\right)^2 + 4b^2\omega'^2}$$

$$y = \frac{F}{\left(\omega^2-\omega'^2\right)^2 + 4b^2\omega'^2}\left(\left(\omega^2-\omega'^2\right)\sin\omega' t - 2b\omega'\cos\omega' t\right)$$

$$y = \frac{F}{\left(\omega^2-\omega'^2\right)^2 + 4b^2\omega'^2}\sin\left(\omega' t - \phi\right)$$

כאשר

$$tg\phi = \frac{2b\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}$$

זהו הפתרון **המצב היציב** שכן כאשר $t \to \infty$ שאר הפתרון זניח.
זאת אומרת המערכת תנוע לאחר זמן בתדירות הכוח המחזורי ω'.

דוגמה:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{2x} + 2x^2$$

פתרון ההומוגנית

$$y_H = e^{\alpha x}$$
$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \quad (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0$$
$$y_H = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

נניח הפתרון האי הומוגנית

$$y_I = \alpha xe^{2x} + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

ונקבל

$$\frac{dy_I}{dx} = \alpha e^{2x} + 2\alpha xe^{2x} + 2\beta x + \gamma$$

$$\frac{d^2y_I}{dx^2} = 2\alpha e^{2x} + 2\alpha e^{2x} + 4\alpha xe^{2x} + 2\beta$$

$$2\alpha e^{2x} + 2\alpha e^{2x} + 4\alpha xe^{2x} + 2\beta - 5\alpha e^{2x} - 10\alpha xe^{2x} - 10\beta x - 5\gamma + 6\alpha xe^{2x} +$$
$$+ 6\beta x^2 + 6\gamma x + 6\delta = e^{2x} + 2x^2$$

$$-\alpha = 1 \quad \alpha = -1$$

$$6\beta = 2 \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$-10\beta + 6\beta + 6\gamma = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} + 6\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{9}$$

$$2\beta - 5\gamma + 6\delta = 0$$
$$-\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3} - \frac{10}{9} + 6\delta = 0 \Rightarrow \delta = \frac{4}{9\cdot 6} = \frac{2}{27}$$

38.3. משוואות אחרות מסדר שני.

למרות שהמשוואה הליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים היא השכיחה ביותר בפיסיקה, ישנם גם מספר צורות אחרות של משוואות מסדר שני שאף הם חשובות.

נדון בהם לפי הסוגים הבאים:

א. משוואות בהם חסר y.

ב. משוואות בהם חסר x.

ג. משוואות מהצורה $y'' + f(y) = 0$.

ד. משוואות מהצורה

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

הנקראת לעתים משואת קושי או אוילר.

ע"מ לפתור סוגים א' או ב' מציבים

$$u = y'$$

ואז במקרה (א) מקבלים $y'' = u'$.

ואז משואה מטיפוס א' הופכת למשואה מסדר ראשון כאשר u משתנה תלוי ו- x משתנה ב"ת. תחילה פותרים u כפונקציה של x ואח"כ מציבים $u = y'$ ופותרים משואה מסדר ראשון עבור y.

דוגמה:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2$$

נציב

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = x$$

$$P = \frac{1}{x}$$

$$Q = x$$

$$I = \int P dx = \ln x$$

$$u = e^{-\ln x} \int x e^{\ln x} dx + C_1 e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \int x^2 dx + \frac{C_1}{x} = \frac{x^3}{3x} + \frac{C_1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$$

עבור מקרה ב' (משוואות בהם חסר x)

נציב $u=y'$ ואז

$$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$$

כלומר אנו משנים את המשתנה הב"ת מ- x ל- y.

שים לב שיש רק משתנה ב"ת אחד במשואה דיפרנציאלית רגילה.

בתחילה x יהיה משתנה ב"ת ו- y תלוי ו- u דיפרנציאל של x. עתה אנו מסתקלים על הבעיה כך:

רואים את y כמשתנה ב"ת כאשר u פונקציה של y.

עם ההצבות הנ"ל משואה דיפרנציאלית שאין בה x הופכת להיות בסדר ראשון עם x כמשתנה תלוי ו- y כמשתנה ב"ת.

לדוגמה:

בשעורים הקודמים דנו בתנועת מסה m המושפיע מכח מחזיר -ky וכח רוסון $l\frac{dy}{dt}$ פרופורציוני למהירות. נדון עתה בבעיה דומה אבל שכח הריסון פרופורציונלי לרבוע המהירות המ"ד שנקבל במקרה זה תהיה

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\pm l\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+ky=0 \quad (l>0)$$

(הסימן $\pm$ נלקח כך שבכל רגע של התנועה הכוח המחזיר מנוגד לכוון התנועה.)

נדון במקרה זו הגוף מתחיל ממנוחה ברגע $t=0$ בנקודה $y=1$ והמקיים את המשואה

$$4\frac{d^2y}{dt^2}\pm 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y=0$$

זוהי דוגמה לסוג ב' בו חסר x אצלנו t.

נשתמש בקשר $\frac{dy}{dt}=u$

ואז

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}=u\frac{dy}{dt}$$

ואז נקבל

$$4u\frac{du}{dy}\pm 2u^2+y=0$$

או

$$\frac{du}{dy}\pm\frac{u}{2}=-\frac{y}{4u}$$

אם נזכור הזכרנו את המשוואות ברנולי מהצורה

$$y'+P(x)y=Q(x)y^k$$

אצלנו

$$u'+P(y)u=Q(y)u^{-1}$$

u מתחיל תפקיד עם y

ו- y מתחיל תפקיד עם x.

כלומר זוהי משוואת ברנולי ב- u ו- y כאשר $k=-1$

נכפיל המשוואה ב- u

$$u'\pm\frac{u}{2}=-\frac{y}{4}u^{-1}\quad /u$$

ונקבל

$$uu'\pm\frac{u^2}{2}=-\frac{y}{4}$$

נציב

$$u^2=z$$

$$2u\frac{du}{dy}=\frac{dz}{dy}$$

ואז נקבל

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}\pm\frac{z}{2}=-\frac{y}{4}\quad /z$$

$$\frac{dz}{dy}\pm z=-\frac{1}{z}y$$

זו משוואה ליניארית

$$P(y)=\pm 1$$

$$Q=-\frac{1}{2}y$$

ואז

$$I = \int (\pm 1) dy = \pm y$$

$$z = e^{-I} \int Q(y) e^{I} dy + C_1 e^{-I} = e^{\mp y} \int \left(-\frac{1}{2} y \right) e^{\pm y} dy + C_1 e^{\mp y} =$$

$$= e^{\mp y} \left(-\frac{1}{2} e^{\pm y} (\pm y - 1) \right) + C_1 e^{\mp y}$$

$$z = -\frac{1}{2} \left(\pm y - 1 \right) + C_1 e^{\mp y}$$

$$z = \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} (y - 1) + C_1 e^{-y}$$

משואה זו נפתרת רק בעזרת שיטות קרוב ואנו לא נמשיך לכן לפתור אותה.

מקרה ג'.

המשואה $y'' + f(y) = 0$ נראה כמקרה פרטי של ב' אולם אעפ"כ חשוב ביותר לדעת דרך פשוטה לפתור אותה. כיון שהיא מופיע לעתים קרובות בפיסיקה.

הטריק הוא להכפיל פשוט את המשואה ב- y' ואז מקבלים

$$y' y'' + f(y) y' = 0$$

או

$$y' \frac{dy'}{dx} + f(y) \frac{dy}{dx} = 0$$
$$y' dy' + f(y) dy = 0$$

ואז לאחר אינטגרציה מקבלים

$$\frac{1}{2} y'^2 + \int f(y) dy = const$$

משואה זו היא מסדר ראשון וניתנת להפרדת משתנים (בהנחה שאין בעיות אנטגרציה) אם הופכים מש"ד לאנטגרל אחד זה כבר חלק חשוב מהפתרון. אין זה חשוב אם האנטגרל קל או קשה לפתרון.

דוגמה:

גוף בעל מסה m נע בכיון ציר x בהשפעת כח $F(x)$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

זו משואה מהצורה $y''+f(y)=0$ ואז נכפיל ב- $v=\dfrac{dx}{dt}$ ונקבל

$$mv\frac{dv}{dt}=F(x)\frac{dx}{dt}$$
$$mvdv=F(x)dx$$
$$\frac{1}{2}mv^2=\int F(x)dx+const$$

זה למעשה הקשר בין אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית. רק שמור האנרגיה.

אבל כאן לא פתרנו עדיין את משואות התנועה $x(t)$ בכ״ז לקשר זה יש לעתים חשובות יותר מאשר למשואת התנועה.

דוגמה:

נכפיל ב- y'

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y-a$$
$$y'dy'=(y-a)dy$$
$$\frac{y'^2}{2}=\frac{(y-a)^2}{2}+C_1$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(y-a)^2+C_1$$
$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{(y-a)^2+C_1}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)^2+C_1}}=\pm dx$$
$$\ln(y-a+\sqrt{(y-a)^2+C_1})=\pm x+C_2$$

משואה מסוג ד':

$$a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=f(x)$$

משואה זו ניתנת לכתיבה כמשואה ליניארית עם מקדמים קבועים ע״י שנוי המשתנה הב״ת מ- x ל- z. ע״י הקשר

$$x=e^z$$
$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}=x\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}$$

וע״י הצבה נקבל

$$a_2\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)+a_1\frac{dy}{dz}+a_0y=f(z)$$

כלומר קבלנו משואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים.

דוגמה:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+4y=\cos\ln x+x\sin\ln x$$

נציב $x=e^z$ $\quad z=\ln x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$$

ולכן נקבל

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}-\frac{dy}{dz}+4y=\cos z+e^z\sin z$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}+4y=\cos z+e^z\sin z$$

פתרון ההומוגנית

$$\left(D^2-2D+4\right)y=0$$

$$m=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$$

$$y=e^z\left(C_1\cos\sqrt{3}z+C_2\sin\sqrt{3}z\right)$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y=A\sin z+B\cos z+Ce^z\sin z+De^z\cos z$$

$$\frac{dy}{dz}=A\cos z-B\sin z+Ce^z\sin z+Ce^z\cos z+De^z\cos z-De^z\sin z$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -A\sin z - B\cos z + (C-D)e^z\sin z + (C-D)e^z\cos z + (C+D)e^z\cos z - (C+D)e^z\sin z =$$
$$= -A\sin z - B\cos z - 2De^z\sin z + 2De^z\cos z$$

$$-A\sin z - B\cos z - 2De^z\sin z + 2Ce^z\cos z - 2A\cos z + 2B\sin z - 2(C-D)e^z\sin z -$$
$$-2(C+D)e^z\cos z + 4A\sin z + 4B\cos z + 4Ce^z\sin z + 4De^z\cos z = \cos z + e^z\sin z$$

$$-A + 2B + 4A = 0$$
$$-B - 2A + 4B = 1$$
$$A = -\frac{2B}{3}$$
$$3B + \frac{4B}{3} = 1$$
$$B = \frac{3}{13};\ A = -\frac{2}{13}$$
$$-2D - 2(C-D) + 4C = 1$$
$$2C - 2(C+D) + 4D = 0$$
$$C = \frac{1}{2};\ D = 0$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$y = e^z\left(C_1\cos\sqrt{3}z + C_2\sin\sqrt{3}z\right) + \frac{1}{13}(3\cos z - 2\sin z) + \frac{1}{2}e^z\sin z =$$
$$= x\left(C_1\cos\sqrt{3}\ln x + C_2\sin\sqrt{3}\ln x\right) + \frac{1}{13}(3\cos\ln x - 2\sin\ln x) + \frac{1}{2}x\sin\ln x$$

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני- כללית

$$\frac{d^2y}{dx^2} + R(x) + S(x)y = Q(x)$$

אם R ו- S קבועים ניתן לפתור בשיטות הקודמות אינטגרציה או השוואת מקדמים (ויש גם שיטות נוספות) אם המקדמים אינם קבועים אין שיטה כללית לפתרון. אולם נביא תהליך שעוזר לפעמים במציאת פתרון.

<u>שיטה: שנוי המשתנה התלוי:</u>

בוחרים z פונקציה לפי ההמשך הטרנספורמציה.

$$v = v(x) \quad u = u(x)$$

באופן ש- $y = u\cdot v$

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+v\frac{d^2u}{dx^2}$$

נציב ב- (1) ונקבל

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+v\frac{d^2u}{dx^2}+R(x)u\frac{dv}{dx}+R(x)v\frac{du}{dx}+S(x)u\cdot v=Q(x)\quad /u$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+R(x)\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{R(x)}{u}\frac{du}{dx}+S(x)\right)v=\frac{Q(x)}{u}$$

נסמן

$$R_1(x)=\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+R(x)$$

$$S_1(x)=\frac{1}{u}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+R(x)\frac{du}{dx}+S(x)u\right)$$

$$Q_1(x)=\frac{Q(x)}{u}$$

ונקבל

$$\frac{d^2v}{dx^2}+R_1(x)\frac{dv}{dx}+S_1(x)v=Q_1(x)$$

לכאורה קבלנו שוב משואה ליניארית מסדר שני מסובכת.

אולם אם נבחר את u להיות פתרון של ההומוגנית

$$\frac{d^2y}{dx^2}+R(x)\frac{dy}{dx}+S(x)=0$$

אזי $S_1=0$ ו- (2) הופכת להיות למשואה מהצורה

$$\frac{d^2v}{dx^2}+R_1(x)\frac{dv}{dx}=Q_1(x)$$

משואה ללא v ואז הצבה

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dz}{dx}\qquad\frac{dv}{dx}=z$$

תהפוך את המשואה מליניארית מסדר ראשון:

$$\frac{dz}{dx}+R_1(x)z=Q_1(x)$$

שאותה עקרונית יודעים לפתור הבעיה העיקרית תהיה למצא פתרון פרטי הליניארית ההומוגנית

עם מקדמים לא קבועים.

השיטה בד"כ נחוש. ויש מעט כללים בנדון הכללים הם:

עבור המשואה

$$\left(D^2+R(x)D+S(x)\right)y=0$$

א. אם $R+xS=0$ אזי $y=x$ פתרון פרטי.

ב. אם $1+R+S=0$ אזי $y=e^x$ פתרון פרטי

ג. אם $1-R+S=0$ אזי $y=e^{-x}$ פתרון פרטי

ד. אם $m^2+mR+S=0$ אזי $y=e^{mx}$ פתרון פרטי

דוגמה:

פתור

$$\left(D^2-\frac{3}{x}D+\frac{3}{x^2}\right)y=2x-1$$

במקרה זה $R+xS=0$ לכן $y=x$ פתרון ההומוגנית.

ולכן נציב $y=xv$

נקבל

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2}$$

נציב במשואה ונקבל

$$2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{3}{x}\left(x\frac{dv}{dx}+v\right)+\frac{3}{x^2}xv=2x-1$$

$$x\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}=2x-1$$

נציב

$$z=\frac{dv}{dx}$$

$$x\frac{dz}{dx}-z=2x-1$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=\frac{2x-1}{x}$$

$$P=-\frac{1}{x}$$

$$Q=2-\frac{1}{x}$$

$$I = \int Pdx = \ln x$$

$$z = e^{-I}\int Qe^{I}dx + C_1e^{-I} = e^{\ln x}\int\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{-\ln x}dx + C_1e^{\ln x}$$

$$z = x\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx + C_1x = x\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)+C_1x = 2x\ln x+1+C_1x$$

$$\frac{dv}{dx} = z = 2x\ln x + 1 + C_1x$$

$$v = \int\left(2x\ln x + 1 + C_1x\right)dx = x^2\ln x + x + C_1'x^2 + C_2$$

$$y = xv = C_1'x^3 + C_2x + x^2 + x^3\ln x$$