סיכום

סיכום

1. **מספרים ממשיים :** טבעיים, שלמים, רציונלים ואירציונליים.

2. **מספרים מורכבים :** צמוד, ערך מוחלט

$2\pi = 360^\circ$ רדיאנים $\qquad Z_2 = R_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \qquad Z_1 = R_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]$$
$$Z_1/Z_2 = \left(R_1/R_2\right)\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$
$$Z_1^n = R_1^n\left[\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1\right]$$
$$Z_1^{1/n} = R_1^{1/n}\left[\cos\frac{\theta_1 + 2\pi\cdot k}{n} + i\sin\frac{\theta_1 + 2\pi\cdot k}{n}\right] \qquad k = 0,1,2,.....n-1$$

3. **פונקציות :** תחום הגדרה, חד ערכית, ענף ראשי, פונקציות פולינומיאליות, אלגבריות, טרנסצנדנטיות, פונקציות טריגונומטריות הפוכות.

4. **גבול של סדרה :** המספר a יקרא גבול של סדרה a_n אם לכל ε חיובי וקטן כרצוננו נוכל למצוא אבר בסדרה a_m כך שלכל $n \geq m$ יתקיים אי השוויון $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$.
סדרה מתבדרת ; סדרה שואפת ל- ∞.

5. **גבול של פונקציה :** אם בכל סדרה בה $x \to a$ הפונקציה שואפת ל- b $\left(f(x) \to b\right)$ b יהיה גבול הפונקציה כאשר $x \to a$. כלומר : $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

אם : $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$

אזי : **I.** $\lim_{x\to a} kf(x) = kA$ $\qquad$ **II.** $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = A \pm B$

III. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = A\cdot B$ $\qquad$ **IV.** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

V. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = A^n$ $\qquad$ פרט למקרים : $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0 שאינם מוגדרים

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x} = 1$$

6. **רציפות :** $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$ אם ורק אם היא מוגדרת בנקודה a ויש לה גבול כאשר $x \to a$ וערך הגבול שווה לערך הפונקציה בנקודה זו. כלומר $f(x)$ רציפה ב- $x = a$ אם ורק אם $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

7. **נגזרות :** <u>הגדרה</u> : $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$f'(x)$ - שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה x .

<u>חוקי גזירה</u> :

$$[cf(x)]'=cf'(x)\ \ ;\ \ [f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$[f(x)/g(x)]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

<u>נוסחת השרשרת</u> :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

<u>פונקציות טריגונומטריות</u> :

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

<u>פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות</u> :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.718281828459....$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e \qquad (\log_e x)'\equiv(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (e^x)'=e^x$$

<u>פונקציות היפרבוליות</u> :

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$tghx \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x \equiv \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad ; \quad \sec hx \equiv \frac{1}{\cosh x} \quad ; \quad \cos echx \equiv \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad ; \quad (\cosh x)' = \sinh x$$
$$(tghx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

8. <u>מכסימום מינימום ונקודת פיתול</u> :

בתחום בו $\frac{dy}{dx} > 0$ הפונקציה עולה

בתחום בו $\frac{dy}{dx} < 0$ הפונקציה יורדת

א. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ לפונקציה מינימום ב- $x = x_o$

ב. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$ לפונקציה מכסימום ב- $x = x_o$

ג. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ אזי :

$\left.\frac{dy}{dx}\right\vert x > x_0$	$\left.\frac{dy}{dx}\right\vert x < x_0$	לפונקציה
+	-	מינימום
-	+	מכסימום
+	+	נקודת פיתול
-	-	נקודת פיתול

ד. אם $f'(x_0) \neq 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ תתכן לפונקציה נקודת פיתול ב- $x = x_o$.

9. **דיפרנציאל:** $dy = f'(x)dx$

10. **אינטגרלים מידיים:** $\int f(x)dx = F(x) + c$

אם: $F'(x) = f(x)$

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
4. $\int \cos x dx = \sin x + c$
5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8. $\int e^x dx = e^x + c$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
12. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$
13. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = tghx + c$
14. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$

חוקי אינטגרציה:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

11. **שיטות אינטגרציה:**

שיטת הצבה: משתמשים בשיטת הצבה כאשר: $\int F(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

ו- F ניתן לבצע עליו אינטגרל מיידי.

מציבים: $\varphi(x) = u$

$$\varphi'(x)dx = du$$

ומקבלים: $\int F(u)du$

<u>אינטגרציה לפי חלקים</u> :

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$

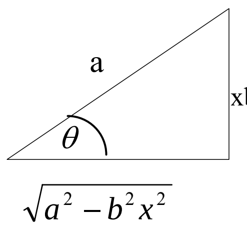
כללים :

א. החלק הנבחר כ- dv ניתן לבצע עליו אינטגרציה.

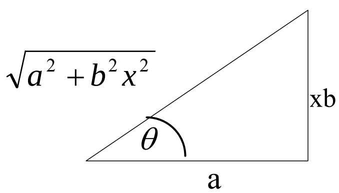
ב. $\int vdu$ לא יהיה מסובך יותר מ- $\int udv$.

<u>הצבות טריגונומטריות</u> :

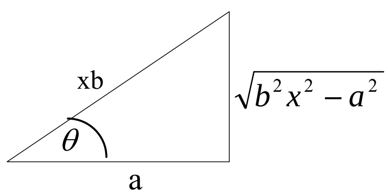
א. אם האנטגרנד מכיל $a^2-b^2x^2$ נציב $x=\frac{a}{b}\sin\theta$



ב. אם האנטגרנד מכיל $a^2+b^2x^2$ נציב $x=\frac{a}{b}tg\theta$



ג. אם האנטגרנד מכיל $b^2x^2-a^2$ נציב $x=\frac{a}{b}\sec\theta$



<u>שברים חלקיים</u> :

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)}=\frac{A}{a_1x+b_1}+\frac{B}{a_2x+b_2}$$

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)^2}=\frac{A}{a_1x+b_1}+\frac{B}{a_2x+b_2}+\frac{C}{(a_2x+b_2)^2}$$

$$\frac{1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x+b_2)}=\frac{AX+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{C}{a_2x+b_2}$$

$$\frac{1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2(a_2x^2+b_2x+c_2)}=\frac{AX+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{CX+D}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}+\frac{EX+F}{a_2x^2+b_2x+c_2}$$

12. **<u>אנטגרל מסוים</u>**:

אם: $$\int f(x)dx = F(x)+c$$

אזי האינטגרל המסוים: $$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

משמעות: השטח שבין הפו' $f(x)$ לציר x בין $x=a$ ל- $x=b$.

נפח גוף סיבוב: $$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

אורך קשת: $$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

13. **<u>אנטגרלים לא אמיתיים</u>:**

אנטגרל מסוים $\int_a^b f(x)dx$ נקרא אנטגרל <u>לא אמיתי</u> אם:

א. לאנטגרד $f(x)$ נקודת אי רציפות אחת לפחות בתחום $a \le x \le b$.

או:

ב. לפחות אחד מקצוות האנטגרל הוא ∞.

<u>כלל</u>: אם האנטגרל לא רציף בנקודה c הנמצאת בין a ו- b $\quad a<c<b$

אזי צריך לבצע באופן הבא: $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

כללים להתכנסות או התבדרות:

$$a \le c \le b \qquad \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p} = \begin{cases} p<1 & \text{מתכנס} \\ p\ge 1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

$$\int_{0<a}^{\infty} \frac{dx}{xp} = \begin{cases} p\le 1 & \text{מתבדר} \\ p>1 & \text{מתכנס} \end{cases}$$

14. **<u>כלל לופיטל</u>:**

אם: $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=0$

או: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

אזי: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

15. **טורים אינסופיים**: $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$

<u>הגדרה</u>: אם: $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ הטור <u>מתכנס</u> ל- s, ואם $\lim_{n\to\infty}s_n$ אינו קיים הטור <u>מתבדר</u>.

תנאי הכרחי להתכנסות: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

טור גאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=\frac{a}{1-q}$ מתכנס עבור $|q|<1$ ומתבדר לכל $|q|\ge 1$.

טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

<u>מבחן האינטגרל</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתכנס אם $\int_a^{\infty}f(x)dx$ מתכנס

$(F(n)>0)$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתבדר אם $\int_a^{\infty}f(x)dx$ מתבדר

<u>מבחן ההשוואה</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ <u>מתכנס</u> אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) קטן או שווה לאבר המתאים של טור חיובי מתכנס ידוע $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, כלומר $a_n\le c_n$.

הטור <u>מתבדר</u> אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) גדול או שווה מן האבר המתאים של טור מתבדר ידוע $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$, כלומר, $a_n\ge d_n$.

<u>מבחן המנה</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ומתבדר אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$
($a_n>0$ לכל n).

<u>טור עם סימנים מתחלפים</u>: $(a_n>0)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots$

<u>משפט לייבניץ</u>: הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n>0$, מתכנס אם לכל n (החל ממקום מסוים בטור) $a_n>a_{n+1}$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

<u>התכנסות בהחלט</u>:

הגדרה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא מתכנס <u>בהחלט</u> אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר הטור נקרא מתכנס בתנאי.

<u>מבחן המנה להתכנסות בהחלט</u> :

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ומתבדר אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

16. <u>טורי חזקות</u> :

טור חזקות ב- x $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

טור חזקות ב- $x - x_0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x - x_0\right)^n$

<u>טור מקלורן</u> :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

<u>טור טיילור</u> :

$$f(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{1}{2!} f''\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)^n$$

17. <u>פונקציות טריגונומטריות אקספוננציאליות והיפרבוליות (מספרים מורכבים)</u> :

הגדרה : ל- z מרוכב :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{z!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

מסקנות : משפט אוילר :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\sin iy = i \sinh y$$

$$\cos iy = \cosh y$$

18. <u>נגזרות חלקיות</u> : נתונה הפונקציה $z = f\left(x, y\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \lim \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

19. **<u>דיפרנציאל שלם</u>** :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

20. **שימושים לנגזרת רגילה :**

א. נתון : $z = f\left(x,y\right)$ $x = x(t)$ $y = y(t)$ אזי : $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

ב. נתון : $z = f\left(x,y\right)$ $y = y(x)$ אזי : $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

21. **נוסחת השרשרת במספר משתנים** :

נתון : $z = f\left(x,y\right)$ $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$

אזי :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

22. **נקודות קיצוניות בפונקציה של שני משתנים** :

אם :

א. $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_o y_o} = 0$ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_o y_o} = 0$

ב. $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{x_o y_o} > 0$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{x_o y_o} > 0$	$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{x_o y_o} < 0$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{x_o y_o} < 0$	$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{x_o y_o} > 0$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{x_o y_o} < 0$ או להפך
ג. $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$		
לפונקציה $z(x,y)$ יש <u>מינימום</u> בנקודה $x_o y_o$	לפונקציה $z(x,y)$ יש <u>מכסימום</u> בנקודה $x_o y_o$	לפונקציה נקודת אוכף ב- $x_o y_o$

23. טור חזקות בשני משתנים :

$$f(x,y)= f(x_o y_o)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0 y_o}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0 y_o}(y-y_0)+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0 y_o}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x_0 y_o}(x-x_0)(y-y_0)+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0 y_o}(y-y_0)^2\right]+\frac{1}{3!}\left[\dots\ .\ \right]+\dots..$$

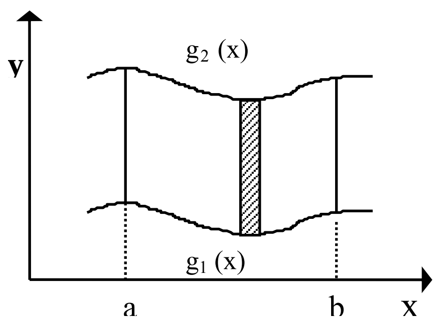
בכתיבה מקוצרת :

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x,y)\Big|_{x_0 y_o}$$

24. אינטגרלים כפולים :

הגדרה :

$$\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \equiv \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$



מבצעים האנטגרל הפנימי כאשר x נלקח כקבוע.

משמעות : האנטגרל הכפול הוא הנפח הכלוא בין הפונקציה $f(x,y)$ לבין חלק המישור xy המתואר באיור.

25. החלפת קואורדינטות (יעקוביאן) :

אם $\begin{matrix} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{matrix}$ אזי :

$$\iint f(x,y)dxdy \to \iint f(u,v)J(u,v)dudv$$

כאשר

$$J\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$ יעקוביאן

עבור קורדינטות פולריות (קטביות)

$\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{matrix}$ $J(r,\theta)=r$ ואז :

$$\iint f(x,y)dxdy \to \iint \bar{f}(r,\theta)rdrd\theta$$

26. **אנטגרלים משולשים :**

קואורדינטות גליליות :

$$dxdydz \to rdrd\theta dz$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

קואורדינטות כדוריות :

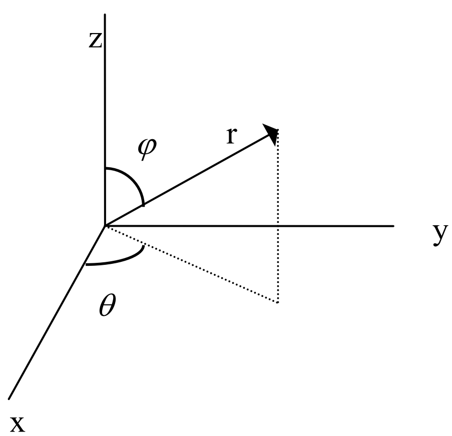
$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = \sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi$$

$$dxdydz \to r^2 \sin\varphi \; drd\theta\, d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = arcty\frac{y}{x}$$

$$y = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



27. **משוואות דיפנציאליות :**

סדר : סדר הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה.

מעלה : מעלת הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה.

משפט : פתרון כללי של משואה דפרנציאלית מסדר n הוא פתרון המכיל n קבועים שרירותיים.

28. **הפרדת משתנים:**

אם : $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ אזי : $\int\frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$

29. **משואה הומוגנית:**

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

מציבים: $z = \frac{y}{x}$

30. **משוואה מהטיפוס:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$ פותרים ע"י החלפת משתנים $x=\bar{x}+\alpha$ $\quad y=\bar{y}+\beta$

כאשר α ו- β מקיימים:

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$$

31. **משוואות ליניאריות:** $\frac{dy}{dx}=P(x)y=Q(x)$

הפתרון הכללי: $y=e^{-I}\int Q(x)e^{I}dx+ce^{-I}$

כאשר: $I=\int P(x)dx$

32. **משוואת ברנולי:** $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{k}$

הצבה: $v=y^{1-k}$ מביאה למשוואה ליניארית.

33. **משוואת קלרו:** $y=xy'+f(y')$

פתרון כללי:

$$y=cx+f(c)$$

34. **משוואה מדוייקת:**

המשוואה: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נקראת מדויקת אם ורק אם קיים $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

במקרה זה פותרים ע"י הנחה שהמשוואה דיפרנציאל שלם $d\mu=0$ ו- $\frac{\partial \mu}{\partial x}=M$ ו- $\frac{\partial \mu}{\partial y}=N$ ו- $\mu=c$.

גורם אינטגרציה:

א. אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ אזי ניתן להפוך המשוואה למדוייקת ע"י כפל המשוואה

בגורם האינטגרציה - $e^{\int f(x)dx}$.

ב. אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=g(y)$ אזי ניתן להפוך המשוואה למדוייקת ע"י כפל המשוואה

בגורם האינטגרציה - $e^{-\int g(y)dy}$.

35. משואה לינארית מסדר שני - הומוגנית :

מהסוג $y''+ay'+by=0$

פתרון כללי ע"י הצבה $e^{\mu x}$ מקבלים : $y=Ae^{\mu_1 x}+Be^{\mu_2 x}$

אם $\mu_1=\mu_2$ הפתרון הכללי : $y=Ae^{\mu_1 x}+Bxe^{\mu_2 x}$

36. משואה לינארית מסדר שני - לא הומוגנית :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x)$$

הפתרון הכללי : $y=y_H+y_I$

כאשר : y_H פתרון כללי של ההומוגנית.

y_I פתרון פרטי כלשהו של האי הומוגנית.

נחוש טוב לפתרון פרטי של הומוגנית ; קומבינציה של הפו' $f(x)$ ושל כל הנגזרות שלה.

<u>שיטת האינטגרציה</u> :

$$D\equiv\frac{\partial}{\partial x} \qquad \left(D^2+aD+b\right)y=f(x)$$

פרוק לגורמים $(D-\alpha)\left(D-\beta\right)y=f(x)$

הצבה I. $(D-\alpha)u=f(x)$ II. $u=\left(D-\beta\right)y$

פתרון I עבור u כמו משואה ליניארית מסדר ראשון ואח"כ פתרון II עבור y כמו משואה ליניארית מסדר ראשון.

37. משפט פורייה:

כל פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π ניתן לפתח לטור הבא :

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

38. **<u>הצורה המורכבת של טור פורייה</u>** :

עבור מחזור של 2π

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

עבור מחזור של $2l$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}dx$$